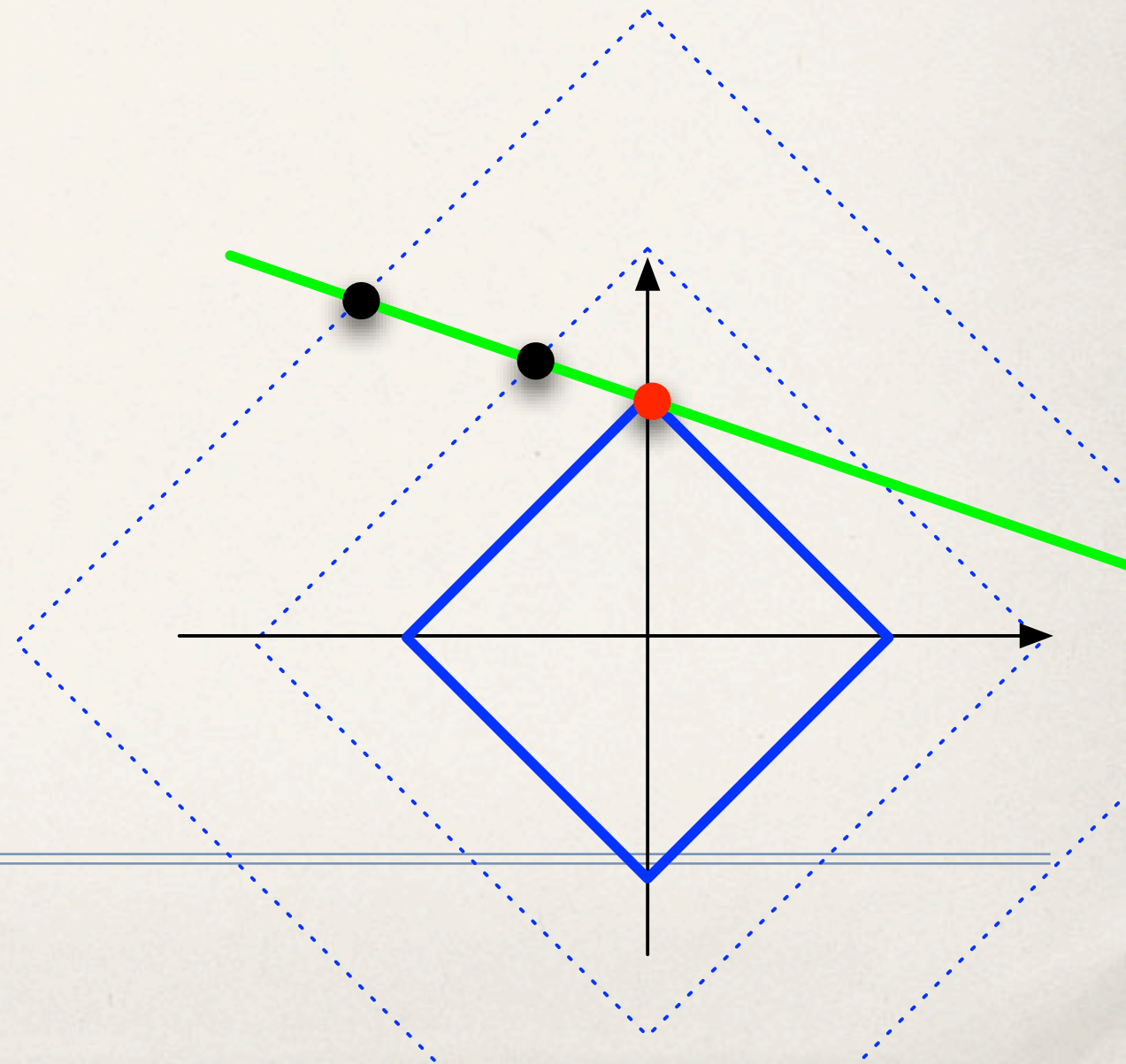


圧縮センシングの理論とその展開

名古屋工業大学 和田山 正

35分



圧縮センシング (Compressed Sensing, Compressive Sensing)

- ✧ 信号処理・機械学習・情報理論の分野で注目
- ✧ Donoho, Candes, Taoらが理論を建設(2003年前後)
- ✧ スパース信号の再現理論
- ✧ キーワード：スパース信号、 L_1 最小化、ランダム行列

圧縮センシング (Compressed Sensing, Compressive Sensing)

- ✧ 信号処理・機械学習・情報理論の分野で注目
- ✧ Donoho, Candes, Taoらが理論を建設(2003年前後)
- ✧ スパース信号の再現理論
- ✧ キーワード：スパース信号、 L_1 最小化、ランダム行列

信号処理的世界

CS

情報理論的世界

本講演の概要

本講演の概要

- ❖ 本講演では、CSの数理的な側面に重点を置き、Candes-Taoらの理論の概略を紹介する。そのうち、CS分野の研究状況の一端について、お話ししたい。
- ❖ 問題設定
- ❖ Candes-Tao のCS理論の概要 (RIP, 完全再現条件)
- ❖ 各種の復元アルゴリズム
- ❖ 多端子情報理論とのつながり

本講演の概要

- ❖ 本講演では、CSの数理的な側面に重点を置き、Candes-Taoらの理論の概略を紹介する。そのうち、CS分野の研究状況の一端について、お話ししたい。
- ❖ 問題設定
- ❖ Candes-Tao のCS理論の概要 (RIP, 完全再現条件)
- ❖ 各種の復元アルゴリズム
- ❖ 多端子情報理論とのつながり

圧縮センシングに関する包括的文解説としては、

田中利幸：圧縮センシングの数理(電子情報通信学会 Fundamentals review)

http://w2.gakkai-web.net/gakkai/ieice/vol4no1pdf/vol4no1_39.pdf

圧縮センシングの問題設定

$F \in \mathbb{R}^{p \times m}$ センシング行列 (センサ・復元器とも知っている)
($m > p$)

$\mathbf{e} \in \mathbb{R}^m$ S-スパースベクトル(非零要素個数がS個以内)

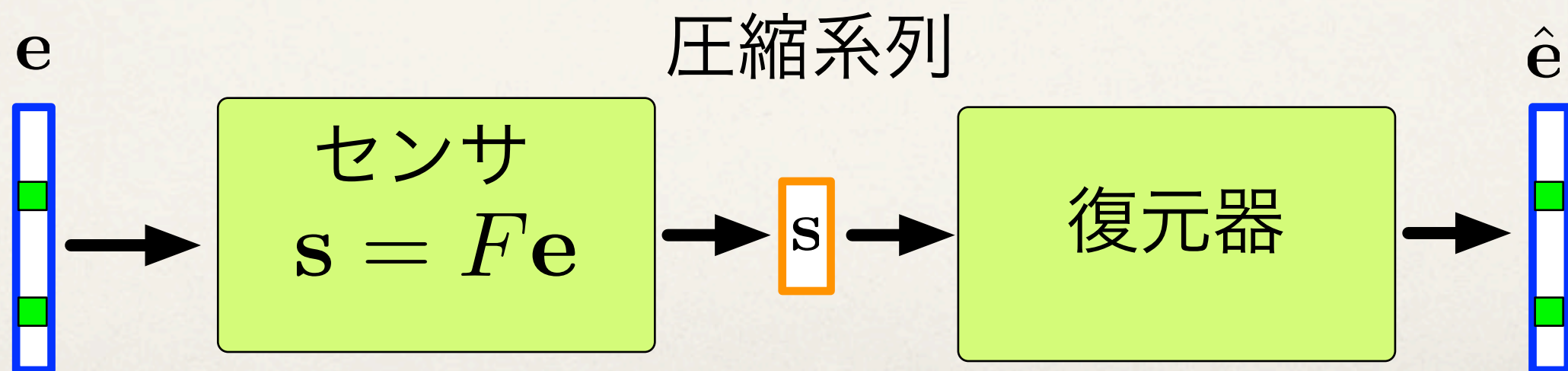
$\mathbf{s} = F\mathbf{e}$ 圧縮系列

圧縮センシングの問題設定

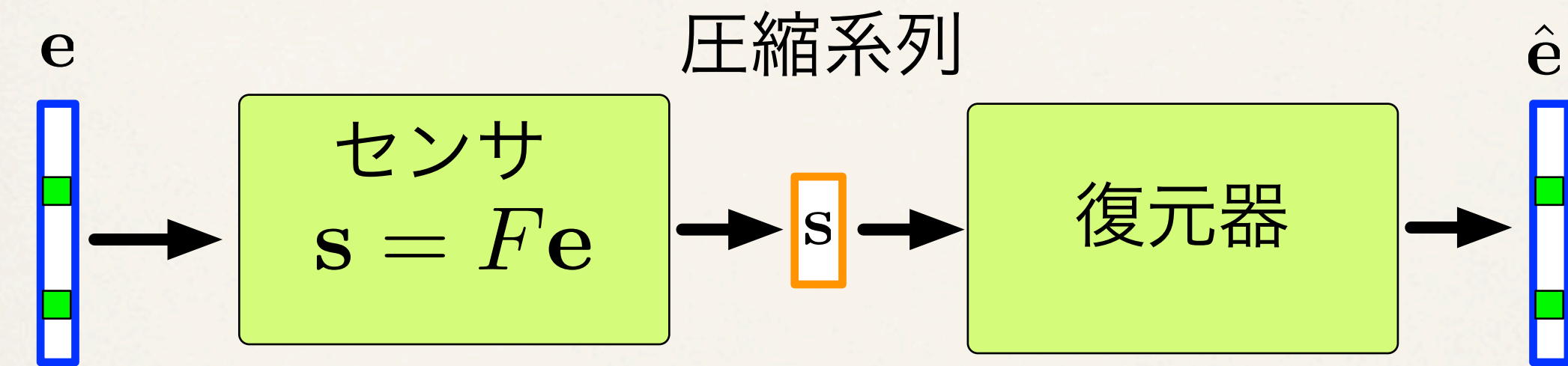
$F \in \mathbb{R}^{p \times m}$ センシング行列 (センサ・復元器とも知っている)
($m > p$)

$\mathbf{e} \in \mathbb{R}^m$ S-スパースベクトル(非零要素個数がS個以内)

$\mathbf{s} = F\mathbf{e}$ 圧縮系列



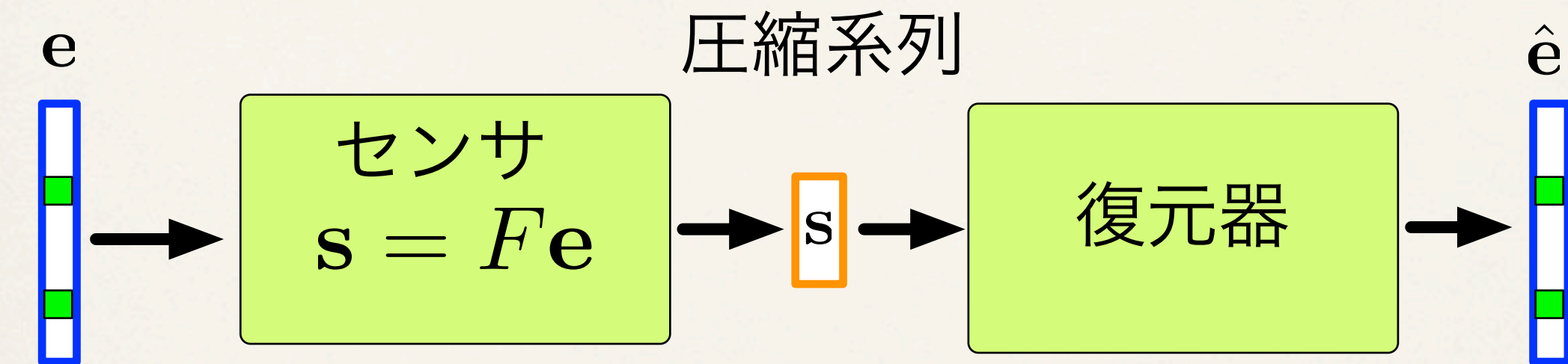
連立方程式が解けるか？



$$F e = s$$

Dimensions: m (width of F), p (height of s)

連立方程式が解けるか？



m

F

$e = s$

p

連立方程式を解く？

m

F

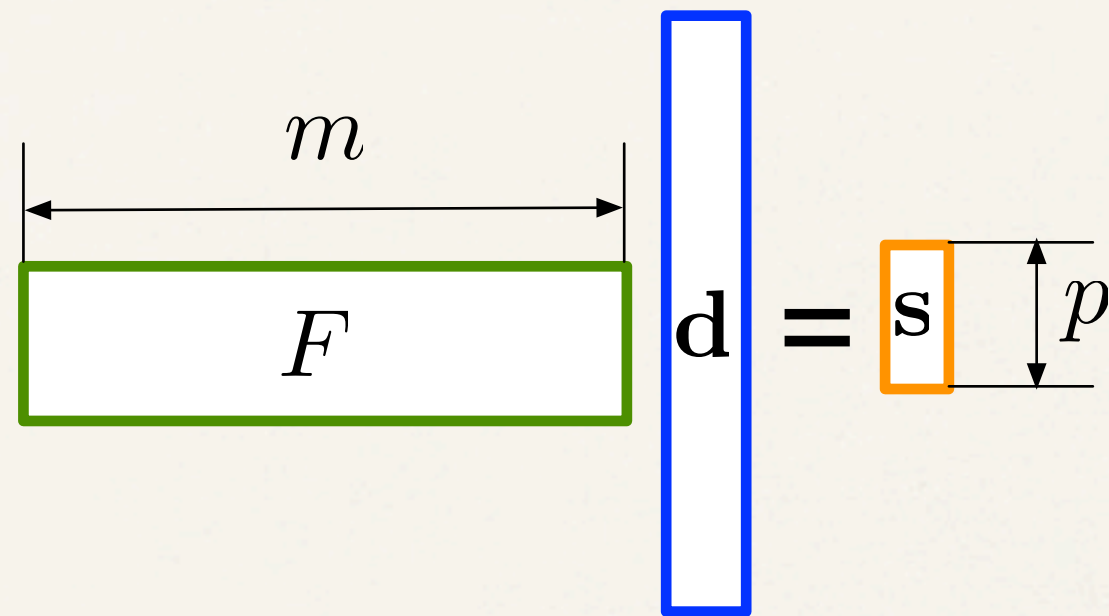
$d = s$

p

e に関する制約条件がなければ、
不良設定問題→解が一意的ではない

圧縮センシングの問題意識

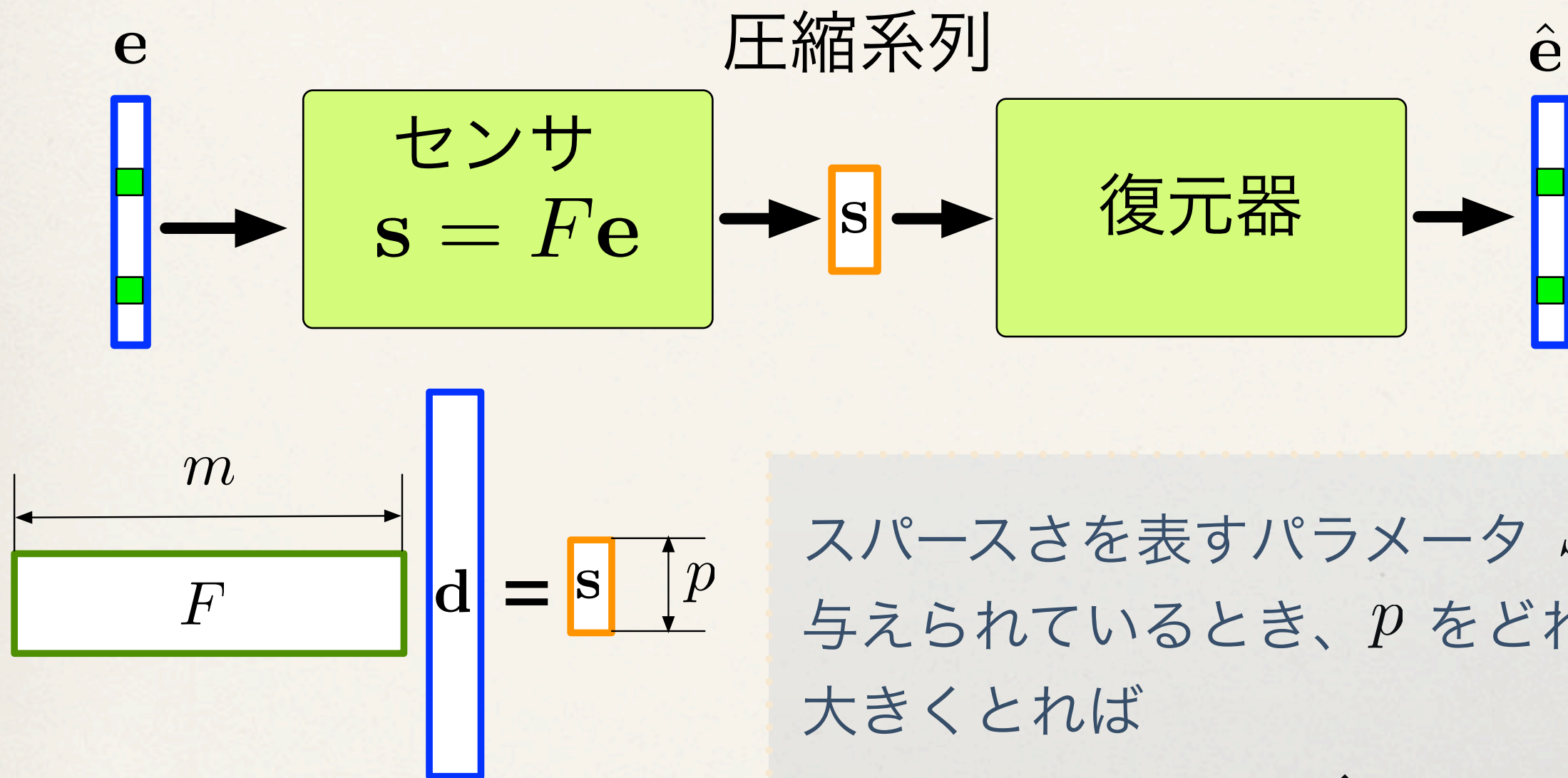
$\mathbf{e}$: S -スパース



$\mathbf{S}$ から $\mathbf{e}$ が完全に定まる場合がある

- [1] 効率の良い復元アルゴリズムを開発したい
- [2] 完全再現のための十分条件を明らかにしたい

完全再現のための十分条件



スパースさを表すパラメータ S が与えられているとき、 p をどれくらい大きくとれば

$$\mathbf{e} = \hat{\mathbf{e}}$$

が成立するか、明らかにしたい

Candes-Taoによる完全再現のための十分条件

Candes-Taoによる完全再現のための十分条件

センシング行列の行数 p が

$$O(S \log(m/S)) < p \text{ を満たすならば}$$

L1復元法を利用することにより、 $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{e}}$ (完全再現)

が十分に高い確率で達成される

Candes-Taoによる完全再現のための十分条件

センシング行列の行数 p が

$$O(S \log(m/S)) < p \text{ を満たすならば}$$

L1復元法を利用することにより、 $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{e}}$ (完全再現)

が十分に高い確率で達成される

L1復元法

$$\text{minimize } \|\mathbf{d}\|_1 \text{ subject to } F\mathbf{d} = \mathbf{s}$$

の解を $\mathbf{d}^*$ とするとき $\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{d}^*$ とする

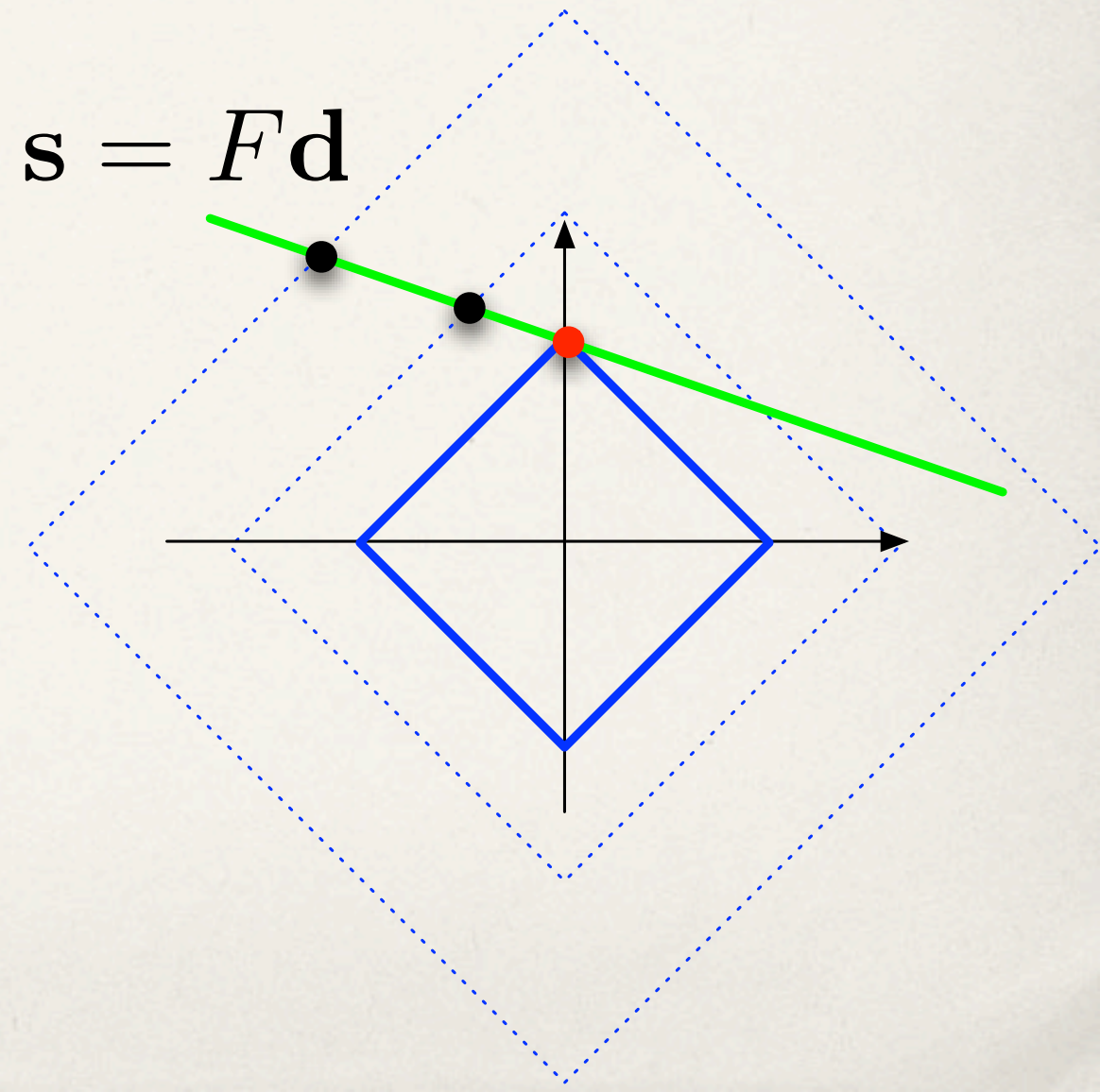
L1 復元法について

minimize $\|\mathbf{d}\|_1$ subject to $F\mathbf{d} = \mathbf{s}$

L1 復元法について

minimize $\|\mathbf{d}\|_1$ subject to $F\mathbf{d} = \mathbf{s}$

[1] スパース解が求まる (c.f. Lasso, L1正則化)

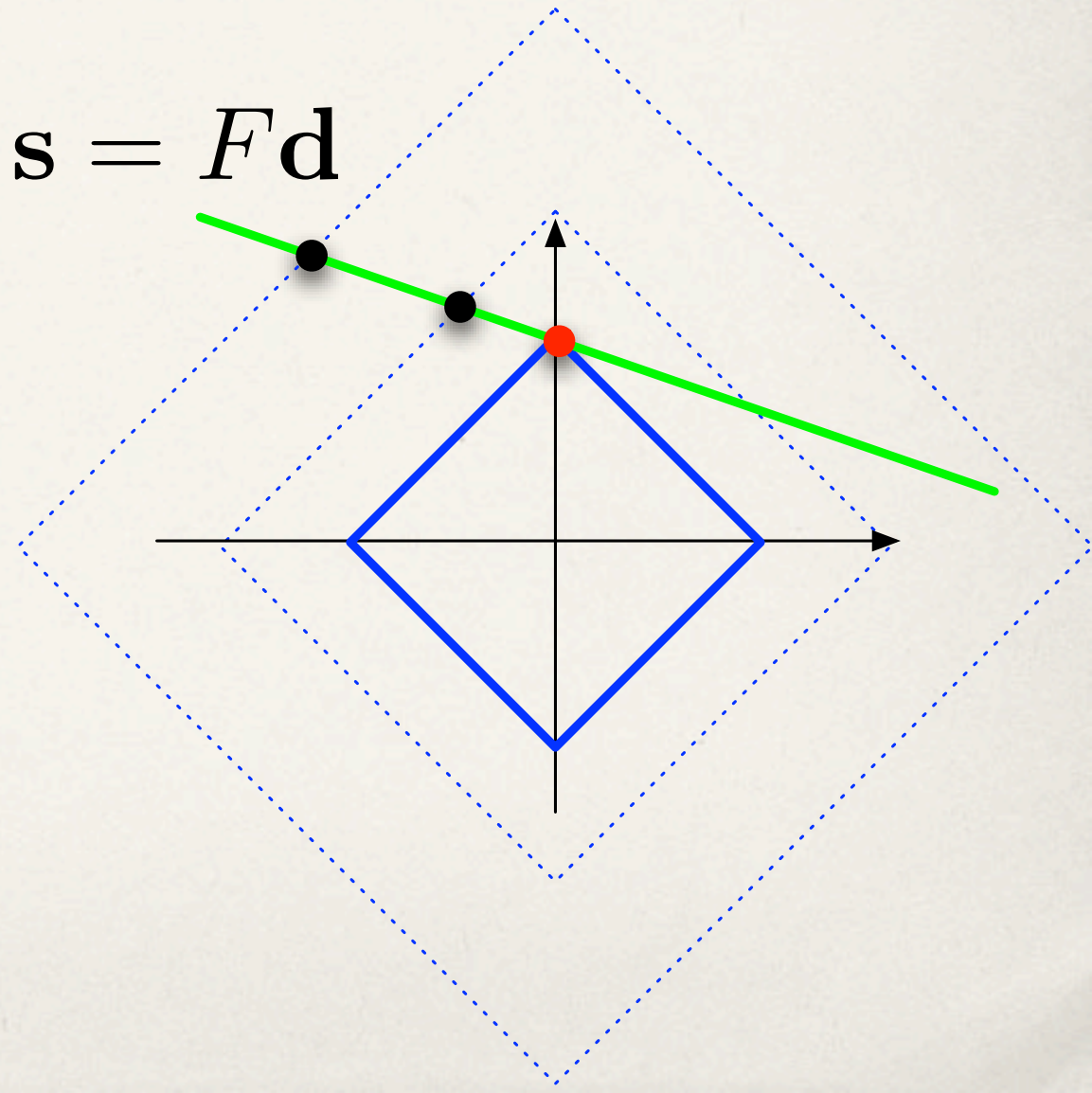


L1復元法について

minimize $\|\mathbf{d}\|_1$ subject to $F\mathbf{d} = \mathbf{s}$

[1] スパース解が求まる (c.f. Lasso, L1正則化)

[2] 等価な線形計画法に書き換える $\mathbf{s} = F\mathbf{d}$
ことが可能 (多項式時間アルゴリズム)



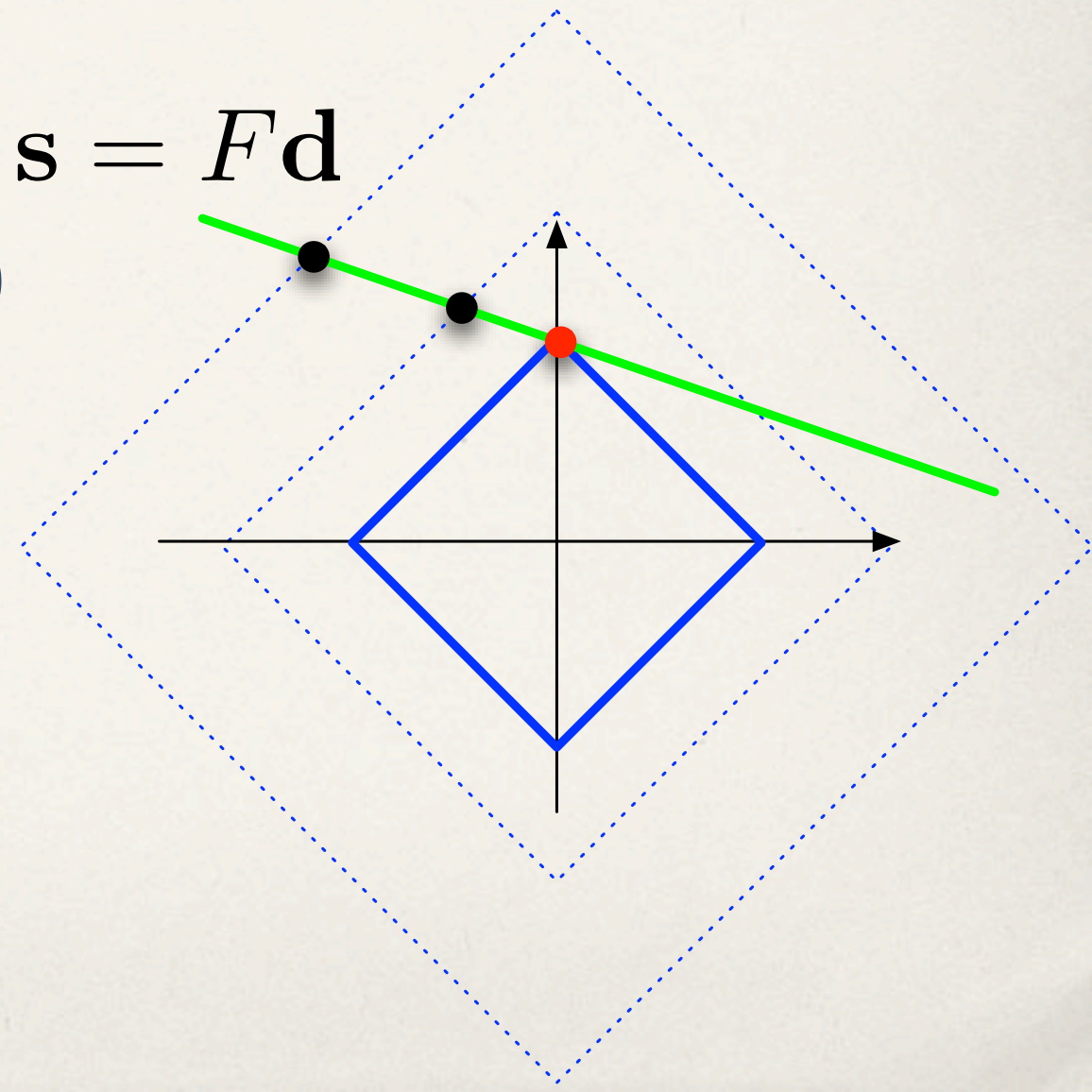
L1復元法について

minimize $\|\mathbf{d}\|_1$ subject to $F\mathbf{d} = \mathbf{s}$

[1] スパース解が求まる (c.f. Lasso, L1正則化)

[2] 等価な線形計画法に書き換える $\mathbf{s} = F\mathbf{d}$
ことが可能 (多項式時間アルゴリズム)

[3] 局所解 = 大域解 (凸計画問題)



完全再現条件の証明のなりたち

完全再現条件の証明のなりたち

Candes-Tao

制約等長性 (RIP: Restricted Isometry Property)

δ_S : RIP定数(センシング行列に対して定まる)

完全再現条件の証明のなりたち

Candes-Tao

制約等長性 (RIP: Restricted Isometry Property)

δ_S : RIP定数(センシング行列に対して定まる)

+

Candes

$\delta_{2S} \leq \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \hat{\mathbf{e}} = \mathbf{e}$ minimize $\|\mathbf{d}\|_1$ subject to $F\mathbf{d} = \mathbf{s}$

完全再現条件の証明のなりたち

Candes-Tao

制約等長性 (RIP: Restricted Isometry Property)

δ_S : RIP定数(センシング行列に対して定まる)

+

Candes

$\delta_{2S} \leq \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \hat{\mathbf{e}} = \mathbf{e}$ minimize $\|\mathbf{d}\|_1$ subject to $F\mathbf{d} = \mathbf{s}$

+

ランダム行列アンサンブルにおけるRIP定数の大偏差的評価
(最大・最小固有値の大偏差的評価)

制約等長性 (RIP)

$$\forall T \subset \{1, \dots, m\}, |T| \leq S, \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{|T|}$$

に対して

$$(1 - \delta) \|\mathbf{c}\|_2^2 \leq \|F_T \mathbf{c}\|_2^2 \leq (1 + \delta) \|\mathbf{c}\|_2^2$$

が成り立つならば、「このセンシング行列は RIPを持つ」という (δ は正の小さい実数)

最小の $\delta \rightarrow$ RIP定数 δ_S

任意のサイズ S 以下の部分行列が正規直交系に近い
(ズレの分が δ)

制約等長性 (RIP)

$$\forall T \subset \{1, \dots, m\}, |T| \leq S, \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{|T|}$$

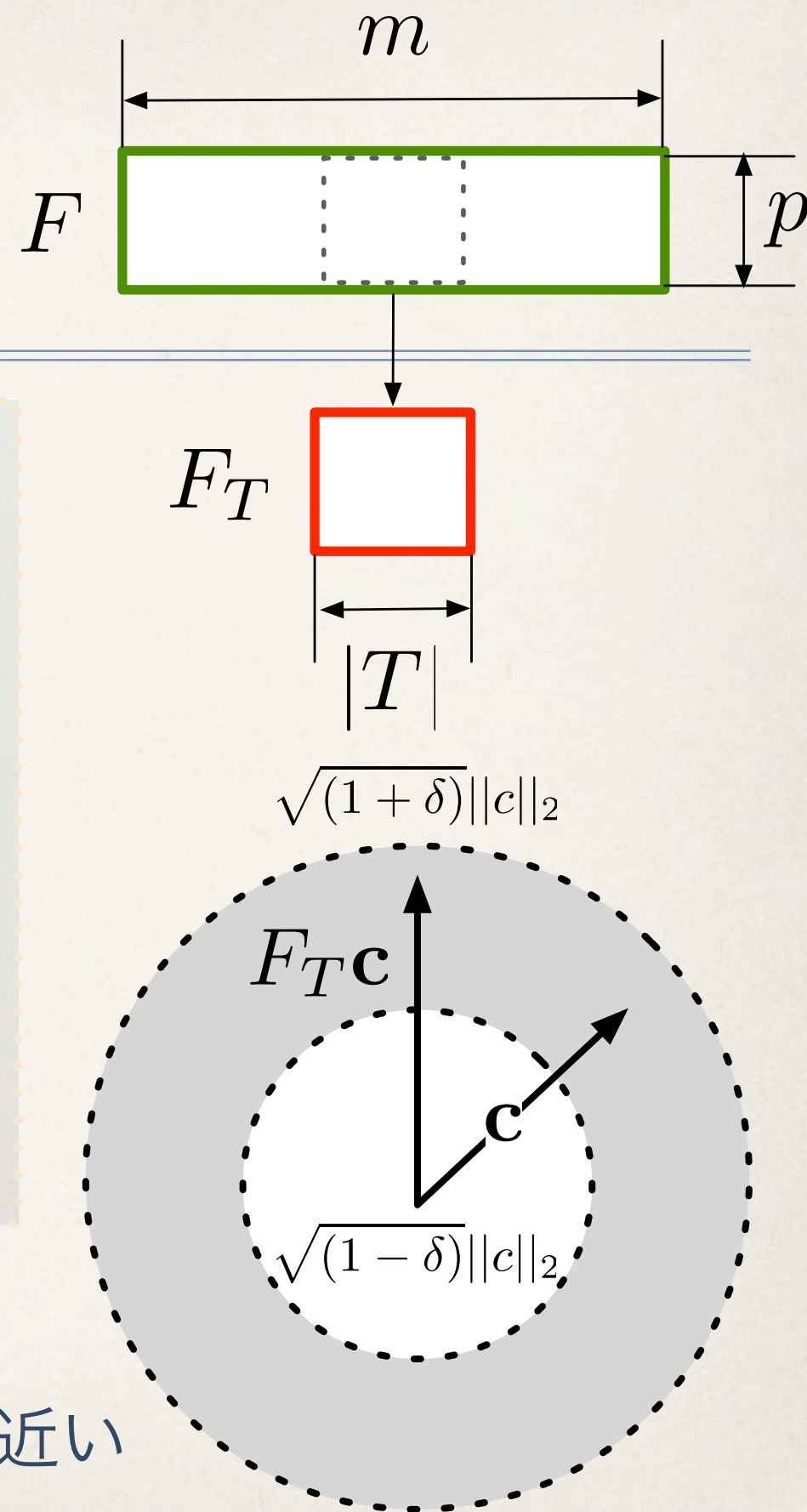
に対して

$$(1 - \delta) \|\mathbf{c}\|_2^2 \leq \|F_T \mathbf{c}\|_2^2 \leq (1 + \delta) \|\mathbf{c}\|_2^2$$

が成り立つならば、「このセンシング行列は RIPを持つ」という (δ は正の小さい実数)

最小の $\delta \rightarrow$ RIP定数 δ_S

任意のサイズ S 以下の部分行列が正規直交系に近い
(ズレの分が δ)



Candesによる定理

仮定

行列Fは $\delta_{2S} \leq \sqrt{2} - 1$ を満たす

Candesによる定理

仮定

行列 F は $\delta_{2S} \leq \sqrt{2} - 1$ を満たす



minimize $\|\mathbf{d}\|_1$ subject to $F\mathbf{d} = \mathbf{s}$

の解を $\mathbf{d}^*$ とするとき $\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{d}^*$ とする

$\mathbf{e} = \hat{\mathbf{e}}$ が成立する

RIP定数の評価

$$G_T = F_T^T F_T \quad \text{とする}$$

$$\min_{T: T \subset \{1, \dots, m\}, |T| \leq S} \lambda_{\min}(G_T) \leq 1 - \delta_S$$

$$\max_{T: T \subset \{1, \dots, m\}, |T| \leq S} \lambda_{\max}(G_T) \geq 1 + \delta_S$$



評価は計算量的に困難

ランダム行列アンサンブル

要素がすべてガウス確率変数である行列(ランダム行列を考える)

Davidson and Szarek (2001)

$$P(\lambda_{\max}(G_T) > (1 + \sqrt{|T|/p} + t)^2) \leq \exp(-pt^2/2)$$

$$P(\lambda_{\min}(G_T) < (1 - \sqrt{|T|/p} - t)^2) \leq \exp(-pt^2/2)$$

最大特異値・最小特異値に関する大偏差的評価の一種

証明のスケッチ(1)

証明のスケッチ(1)

ユニオン上界

$$\begin{aligned} & P \left(\max_{T: |T| \leq 2S} \lambda_{\max}(F_T^T F_T) > (1 + \sqrt{|T|/p} + t)^2 \right) \\ & \leq \sum_{T: |T| \leq 2S} P(\lambda_{\max}(F_T^T F_T) > (1 + \sqrt{|T|/p} + t)^2) \end{aligned}$$



証明のスケッチ(1)

ユニオン上界

$$\begin{aligned} & P \left(\max_{T: |T| \leq 2S} \lambda_{\max}(F_T^T F_T) > (1 + \sqrt{|T|/p} + t)^2 \right) \\ & \leq \sum_{T: |T| \leq 2S} P(\lambda_{\max}(F_T^T F_T) > (1 + \sqrt{|T|/p} + t)^2) \end{aligned}$$



Davidson and Szarek の結果を使う

$$\begin{aligned} & P \left(\max_{T: |T| \leq 2S} \lambda_{\max}(F_T^T F_T) > (1 + \sqrt{|T|/p} + t)^2 \right) \\ & \leq \sum_{s=1}^{2S} \binom{m}{s} \exp(-pt^2/2) \end{aligned}$$



証明のスケッチ(2)

証明のスケッチ(2)



いくつかの変形・不等式評価



証明のスケッチ(2)



いくつかの変形・不等式評価



$$\left(1 + \sqrt{2S/p} + \beta \sqrt{\frac{S}{p} \log(m/S)}\right)^2 > 1 + \delta_{2S} \quad \text{が成立}$$

証明のスケッチ(2)



いくつかの変形・不等式評価



$$\left(1 + \sqrt{2S/p} + \beta \sqrt{\frac{S}{p} \log(m/S)}\right)^2 > 1 + \delta_{2S} \quad \text{が成立}$$



$$\delta_{2S} \leq \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \hat{\mathbf{e}} = \mathbf{e}$$

完全再現のための十分条件

$$O(S \log(m/S)) < p \Rightarrow \hat{\mathbf{e}} = \mathbf{e}$$

証明のスケッチ(2)



いくつかの変形・不等式評価



$$\left(1 + \sqrt{2S/p} + \beta \sqrt{\frac{S}{p} \log(m/S)}\right)^2 > 1 + \delta_{2S} \quad \text{が成立}$$



$$\delta_{2S} \leq \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \hat{\mathbf{e}} = \mathbf{e}$$

完全再現のための十分条件

$$O(S \log(m/S)) < p \Rightarrow \hat{\mathbf{e}} = \mathbf{e}$$

解説記事：和田山正, “圧縮センシングにおける完全再現十分条件について”, 日本神経回路学会誌, pp.63-69, Vol.17, no.2, 6月, 2010

ここまでのまとめ

- ❖ 良好な δ_S を有する行列を確定的に構成することは困難。
- ❖ ランダム行列が良好な δ_S を有することを確率的手法に基づき示す
- ❖ 圧縮系列長 p と S との間のトレードオフ関係を明らかにする
- ❖ 疎ベクトル再現ができる、というだけではなく、再現可能な条件について詳細に議論を詰めているのがCS理論の特徴

圧縮センシングに関する研究状況

圧縮センシングに関する研究状況

復元アルゴリズムの
改良と再現条件

圧縮センシングに関する研究状況

復元アルゴリズムの
改良と再現条件

確定的なセンシング
行列の構成法

圧縮センシングに関する研究状況

復元アルゴリズムの
改良と再現条件

確定的なセンシング
行列の構成法

情報理論的設定に
おける再現条件

圧縮センシングに関する研究状況

復元アルゴリズムの
改良と再現条件

確定的なセンシング
行列の構成法

情報理論的設定に
おける再現条件

マルチセンサーに対
するCS理論

圧縮センシングに関する研究状況

復元アルゴリズムの
改良と再現条件

確定的なセンシング
行列の構成法

情報理論的設定に
おける再現条件

マルチセンサーに対
するCS理論

低ランク行列近似
行列補間問題

圧縮センシングに関する研究状況

復元アルゴリズムの
改良と再現条件

確定的なセンシング
行列の構成法

情報理論的設定に
おける再現条件

マルチセンサーに対
するCS理論

低ランク行列近似
行列補間問題

CSの実問題への
応用

圧縮センシングに関する研究状況

復元アルゴリズムの
改良と再現条件

確定的なセンシング
行列の構成法

情報理論的設定に
おける再現条件

マルチセンサーに対
するCS理論

低ランク行列近似
行列補間問題

CSの実問題への
応用

<http://dsp.rice.edu/cs> Compressive Sensing Resources

圧縮センシングに関する研究状況

復元アルゴリズムの
改良と再現条件

確定的なセンシング
行列の構成法

情報理論的設定に
おける再現条件

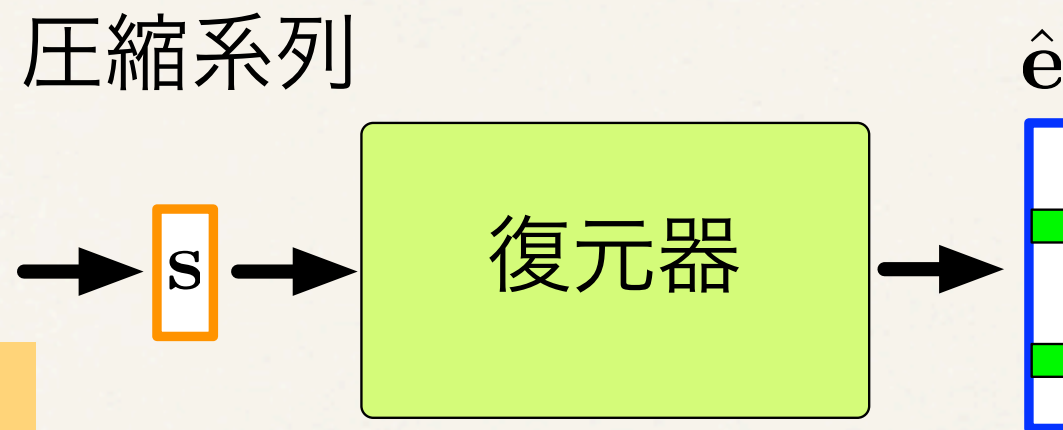
マルチセンサーに対
するCS理論

低ランク行列近似
行列補間問題

CSの実問題への
応用

<http://dsp.rice.edu/cs> Compressive Sensing Resources

様々な復元アルゴリズム



L1 復元法以外にも
多くの選択肢

- ✧ L0復元アルゴリズム
- ✧ L_p 復元アルゴリズム ($0 < p < 1$)
- ✧ Matching Pursuit
- ✧ メッセージパッシング型
- ✧ 射影勾配法型

Lp復元法

$$\text{minimize } \|\mathbf{d}\|_p \text{ subject to } F\mathbf{d} = \mathbf{s}$$

Lp復元法

$$\text{minimize } \|\mathbf{d}\|_p \text{ subject to } F\mathbf{d} = \mathbf{s}$$

$$\underline{p = 0}$$

完全再現十分条件 $\delta_{2S} < 1$

NP困難問題(組合せ最適化問題的になる)

Lp復元法

$$\text{minimize } \|\mathbf{d}\|_p \text{ subject to } F\mathbf{d} = \mathbf{s}$$

$$\underline{p = 0}$$

完全再現十分条件 $\delta_{2S} < 1$

NP困難問題(組合せ最適化問題的になる)

$$\underline{0 < p < 1}$$

凸計画問題では無くなる→局所解の問題が生じる

実際にはかなりうまく動くことが示されている

Rick Chartrand, [Exact reconstructions of sparse signals via nonconvex minimization](#). (IEEE Signal Proc. Lett., 14(10) pp. 707-710, 2007)

Matching Pursuit

$$\mathbf{r} = \mathbf{s}, \quad Q = []$$

$$i = \arg \max_{j=1,2,\dots,m} |(\mathbf{r}, \mathbf{f}_j)|$$

$$Q = [Q \quad \mathbf{f}_i]$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{s} - Q\mathbf{x}\|_2$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{s} - Q\hat{\mathbf{x}}$$

残余ベクトルと最大相関を持つFの列ベクトルを探す (マッチング)

最小2乗法

残余ベクトルの更新

Joel Tropp and Anna Gilbert, [Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit](#). (IEEE Trans. on Information Theory, 53(12) pp. 4655-4666, December 2007)

射影勾配型アルゴリズム GraDes

射影勾配型アルゴリズム GraDes

$$\mathbf{x} \leftarrow H_S \left(\mathbf{x} + \frac{1}{\gamma} F^T (\mathbf{s} - F\mathbf{x}) \right)$$

Rahul Garg and Rohit Khandekar

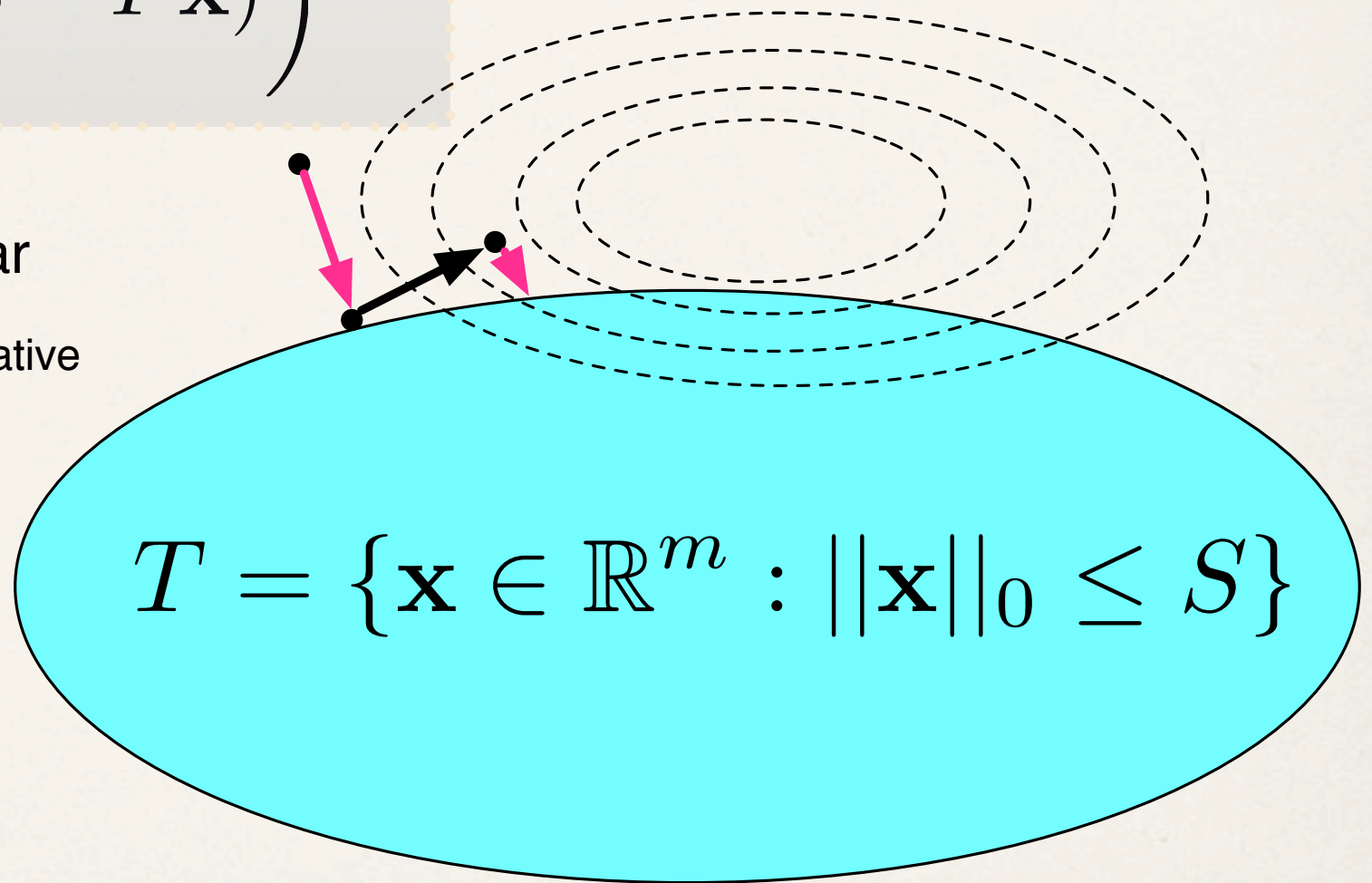
Gradient Descent with Sparsification: An iterative algorithm for sparse recovery with restricted isometry property

射影勾配型アルゴリズム GraDes

$$\mathbf{x} \leftarrow H_S \left(\mathbf{x} + \frac{1}{\gamma} F^T (\mathbf{s} - F\mathbf{x}) \right) \quad ||F\mathbf{x} - \mathbf{s}||_2^2 \text{ の等高線}$$

Rahul Garg and Rohit Khandekar

Gradient Descent with Sparsification: An iterative algorithm for sparse recovery with restricted isometry property



→ 射影ステップ
→ 勾配法ステップ

圧縮センシングに関する研究状況

復元アルゴリズムの
改良と再現条件

確定的なセンシング
行列の構成法

情報理論的設定に
おける再現条件

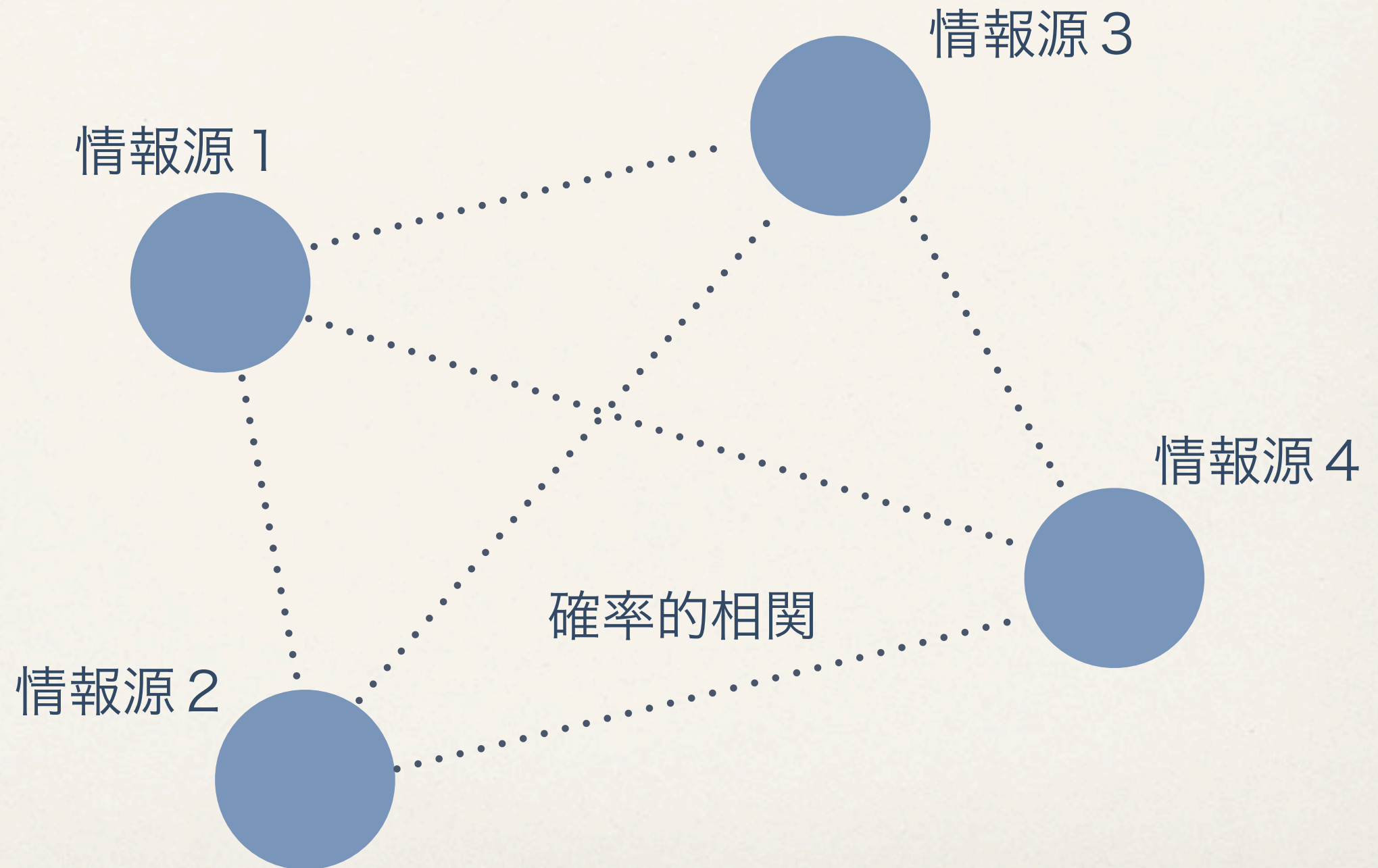
マルチセンサーに対
するCS理論

低ランク行列近似
行列補間問題

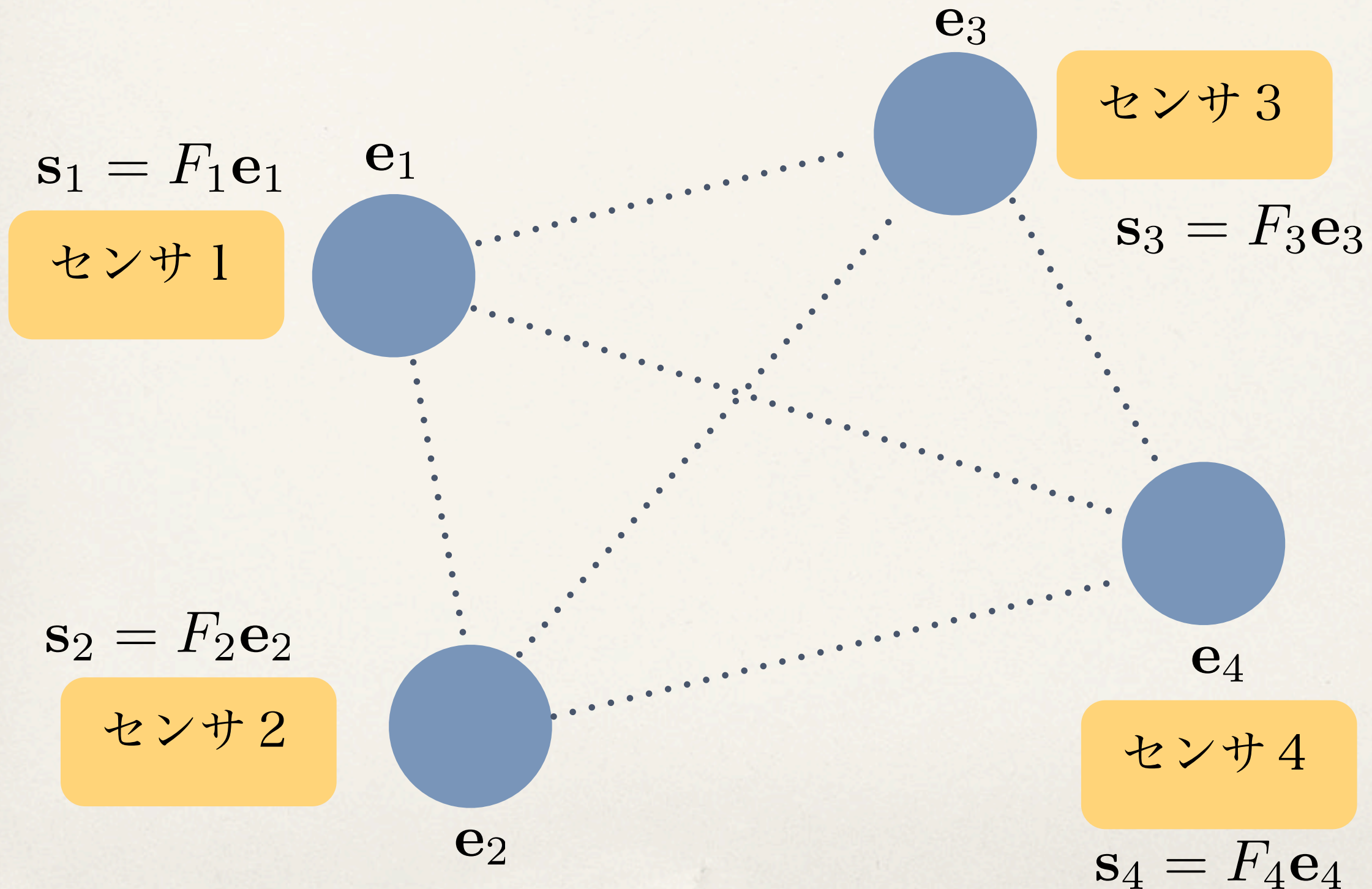
CSの実問題への
応用

<http://dsp.rice.edu/cs> Compressive Sensing Resources

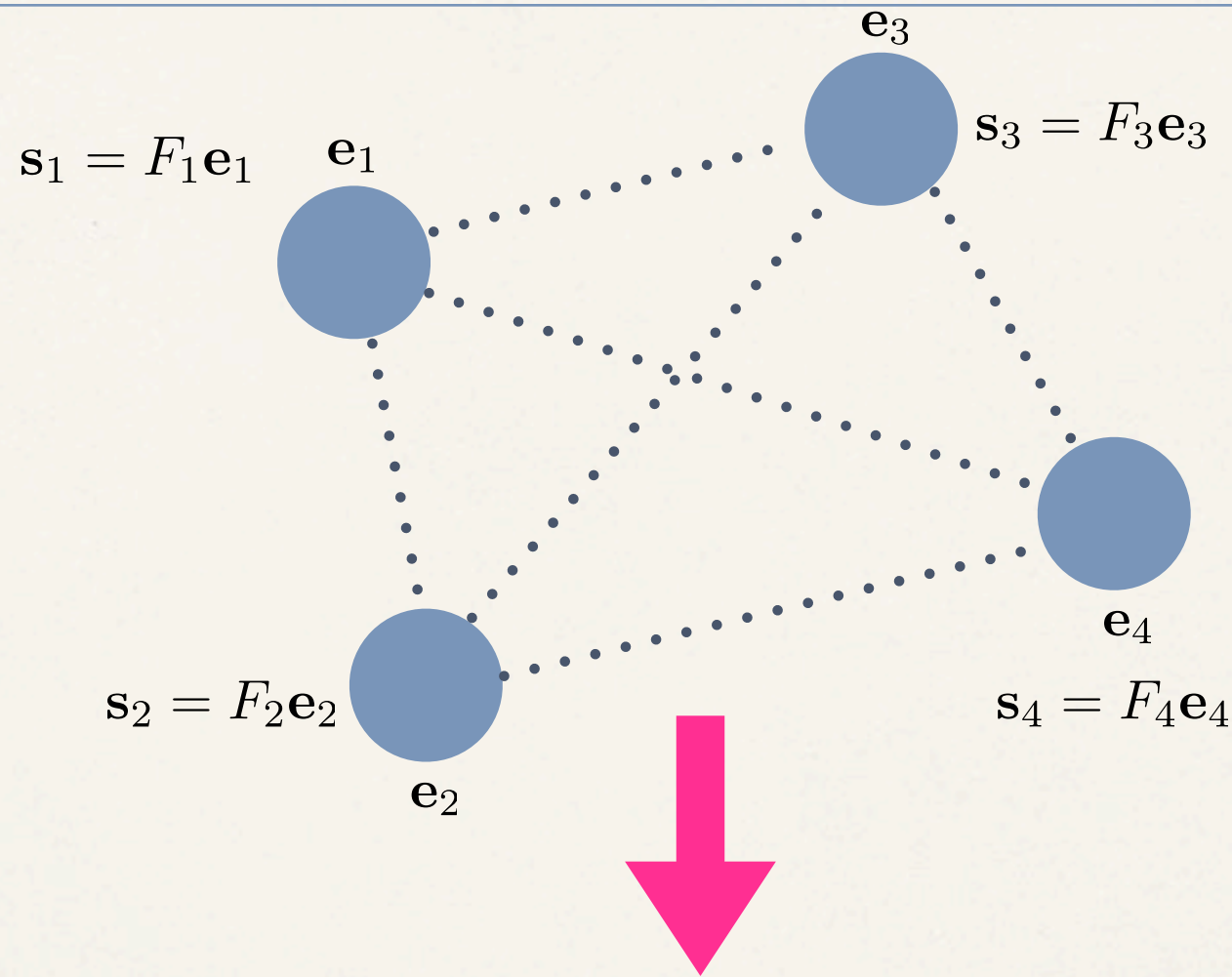
相関のある情報源



相関のある情報源におけるセンシング



相関のある情報源におけるセンシング

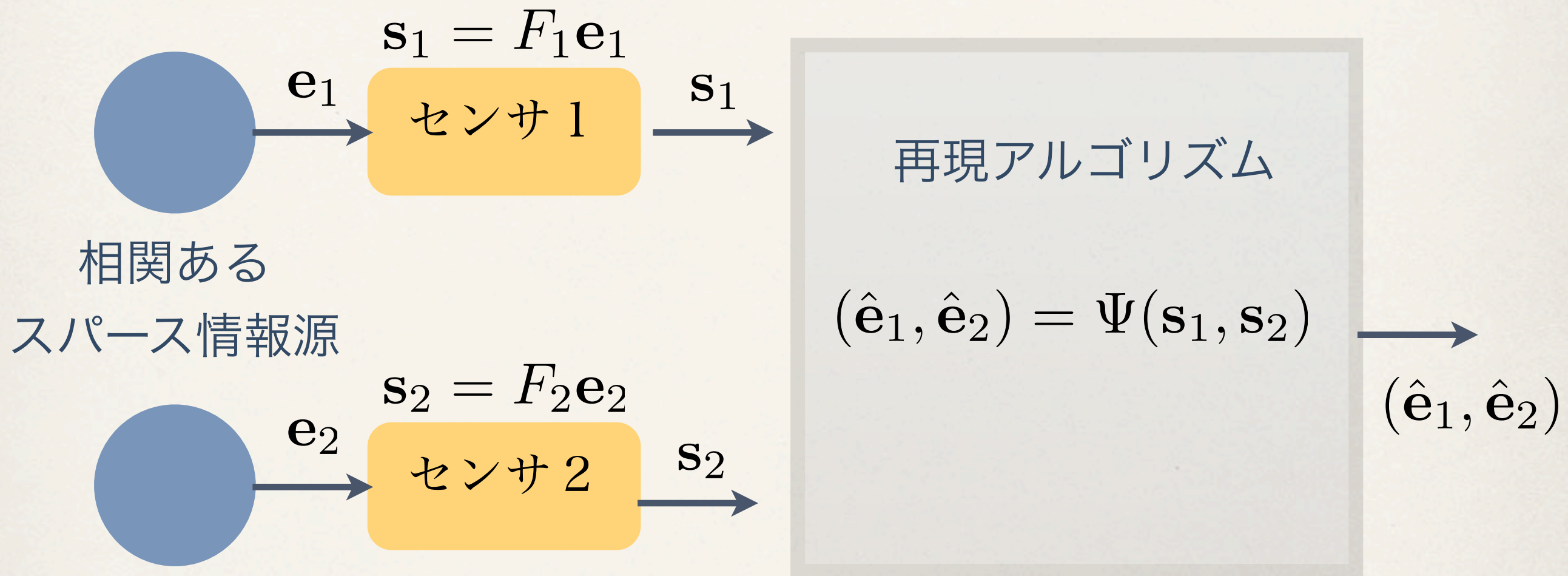


センター

$$(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4) = \Psi(s_1, s_2, s_3, s_4)$$

再現可能条件、トレードオフはどうなる？

Slepian-Wolf 的設定

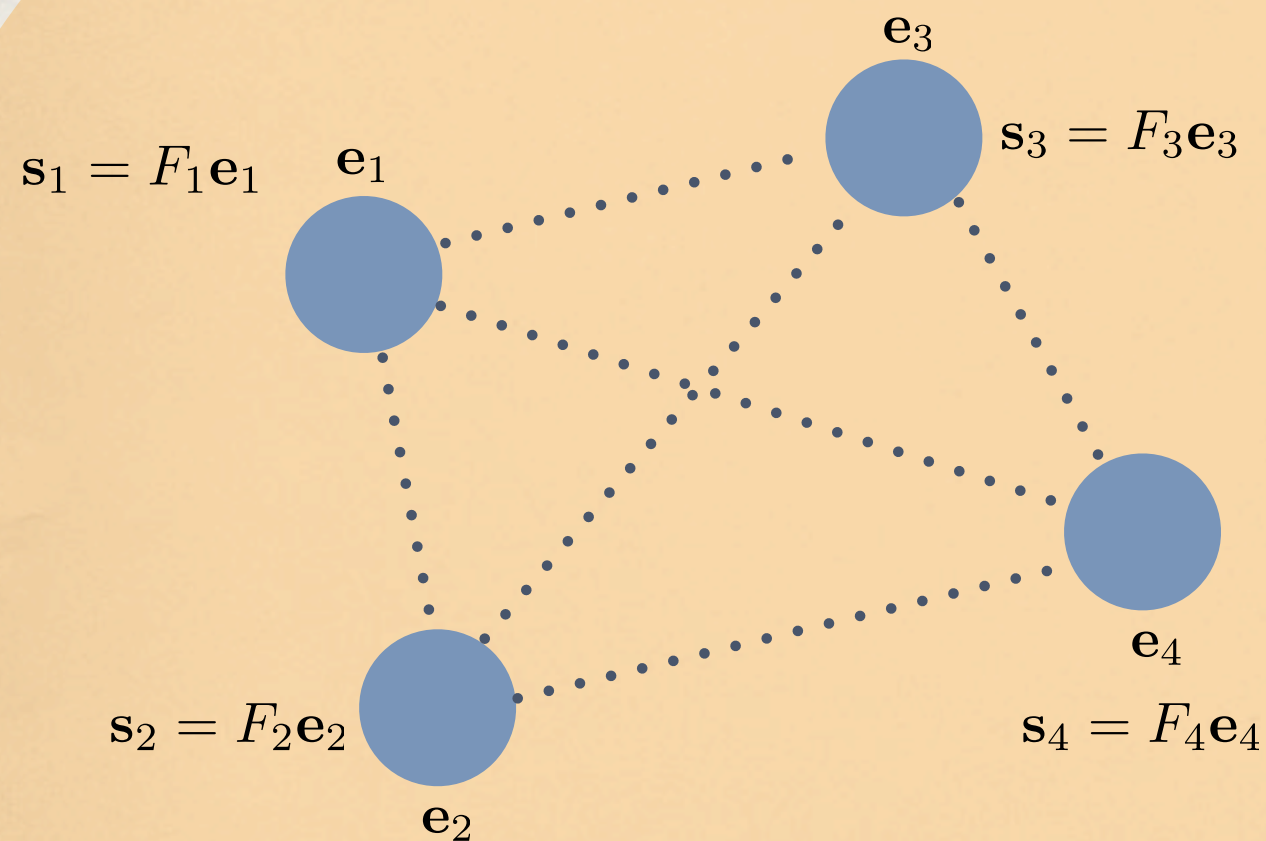


Dror Baron, Marco F. Duarte, Michael B. Wakin, Shriram Sarvotham, and Richard G. Baraniuk, [Distributed compressive sensing](#). (Preprint, 2005) [See also related [technical report](#) and conference publications: [Allerton 2005](#), [Asilomar 2005](#), [NIPS 2005](#), [IPSN 2006](#)]

多端子情報理論とCS理論の つながり

多端子情報理論とCS理論の つながり

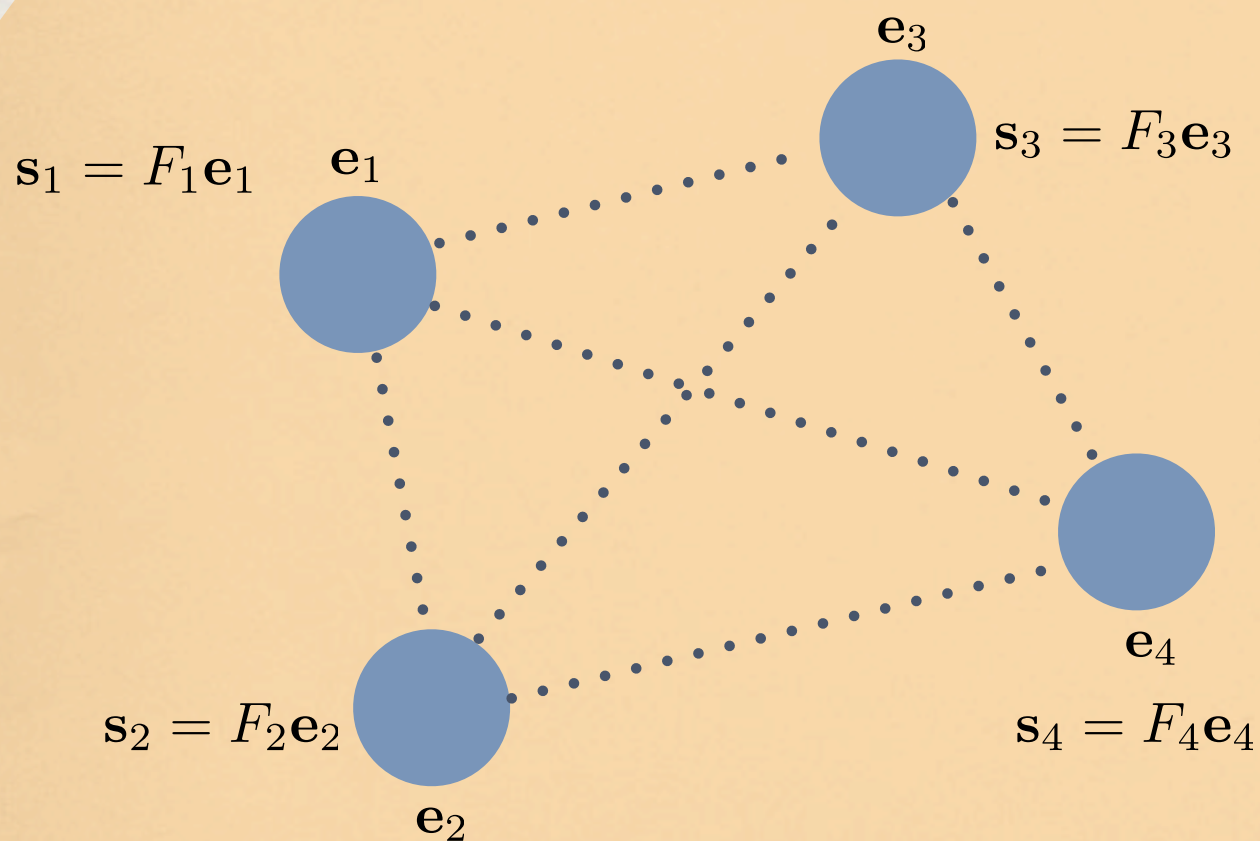
多端子情報理論に
おける符号化



有限体上のベクトルに
有限体上の行列を乗じる

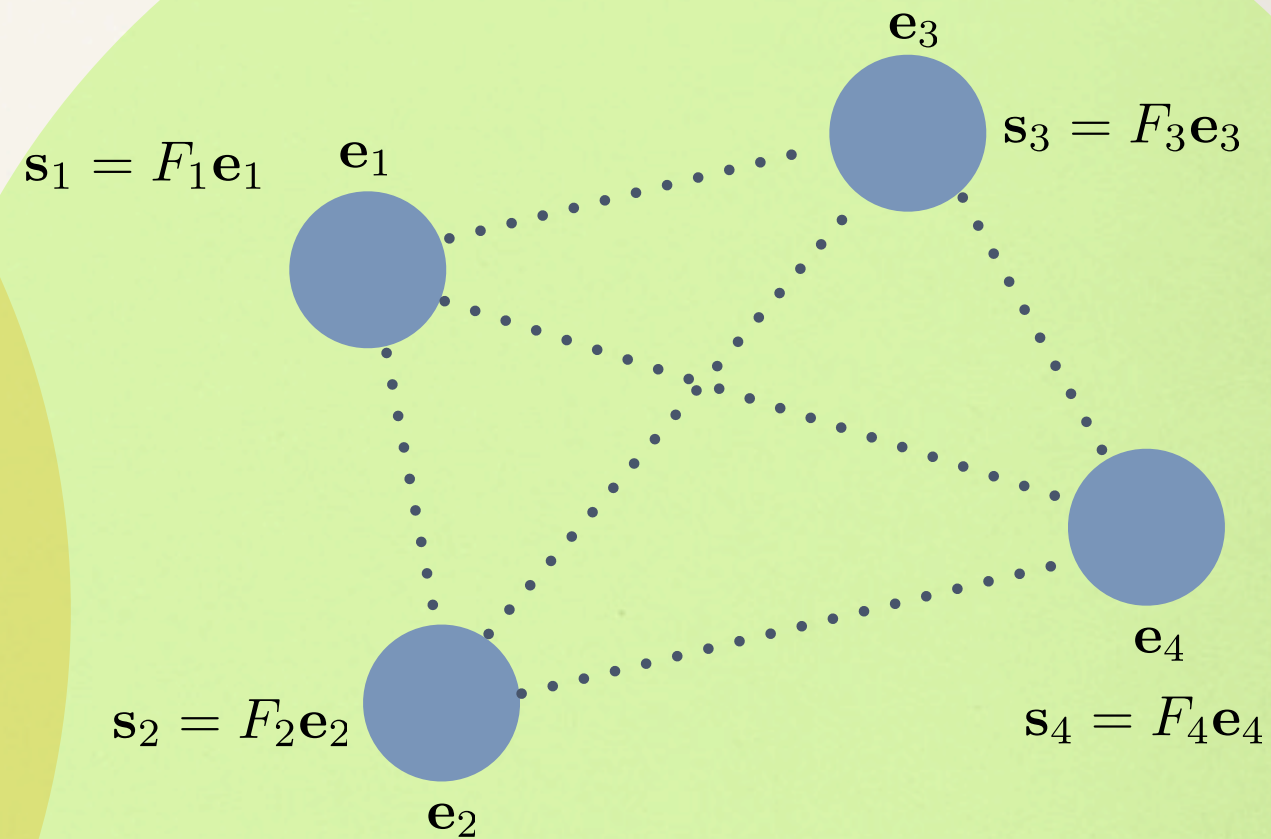
多端子情報理論とCS理論の つながり

多端子情報理論に
おける符号化



有限体上のベクトルに
有限体上の行列を乗じる

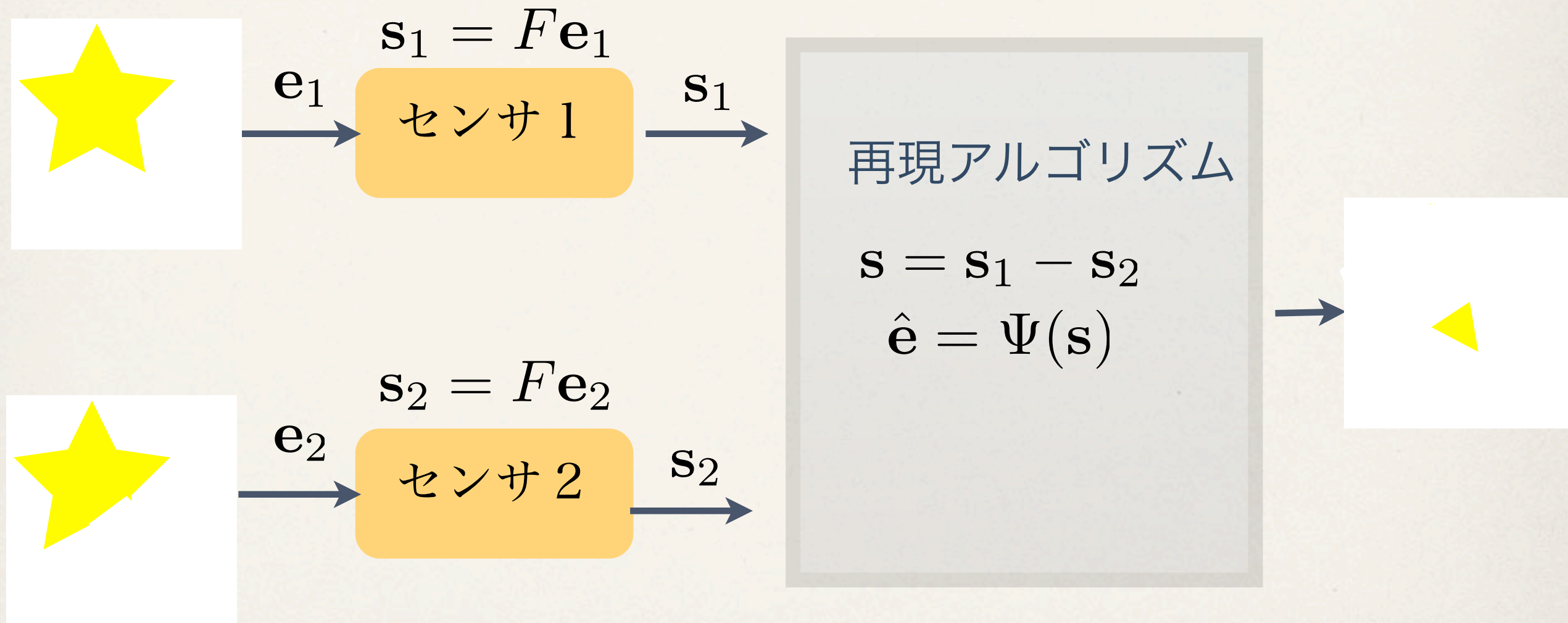
CSにおける
センシング



実数体上のベクトルに
実数体上の行列を乗じる

Koerner-Marton的設定

2つのデータの差分のみ知りたい



センシング過程が線形演算に成っているところがポイント

まとめ

- ❖ 本講演では、CSの数理的な側面に重点を置き、Candes-Taoらの理論の概略について説明した。
- ❖ CS理論＝復元アルゴリズム＋再現条件
- ❖ CS理論は信号处理的でもあり、情報理論的でもある
- ❖ いくつかの復元アルゴリズムの原理について解説した
- ❖ CSと多端子情報理論のつながり・類似性に着目することで新しいテーマが生まれる可能性がある