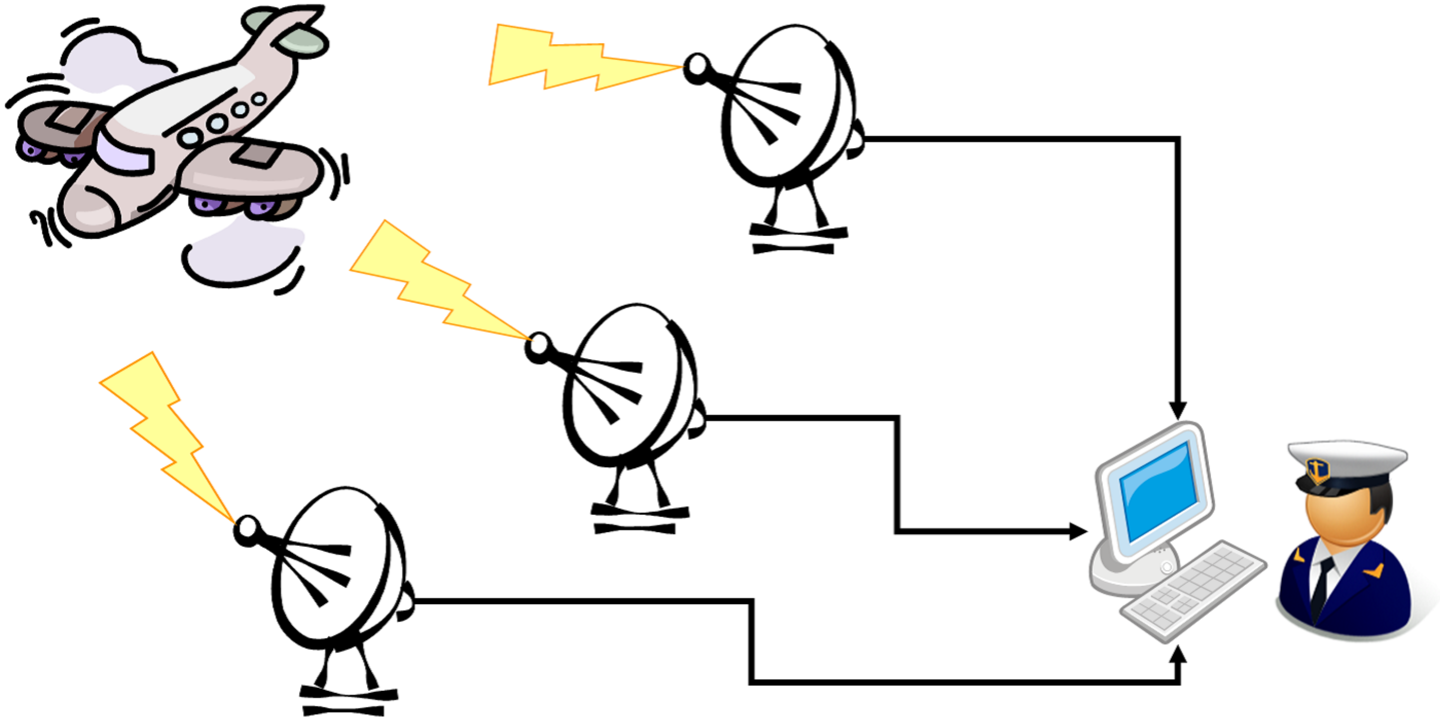
IBIS2010

多端子情報源符号化の現状と課題

葛岡成晃

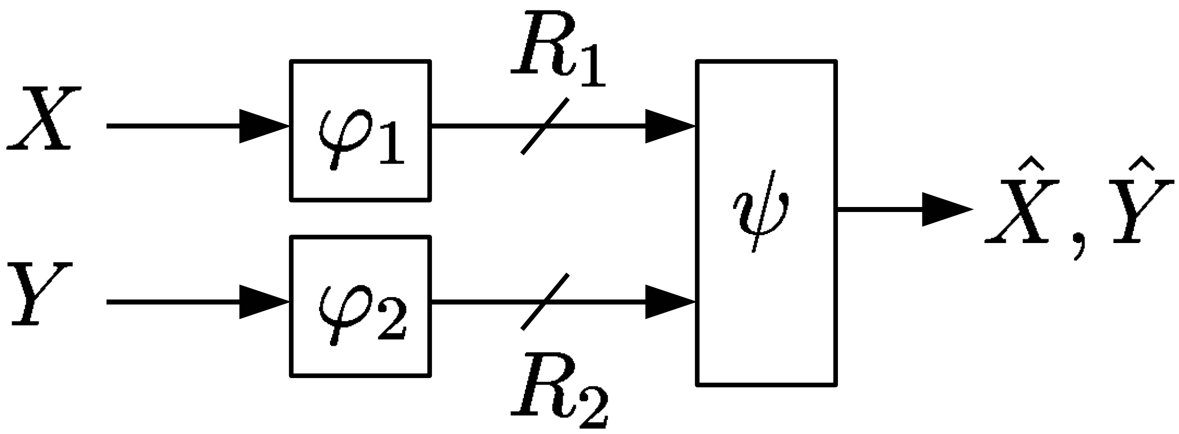
（和歌山大学）

お話しすること



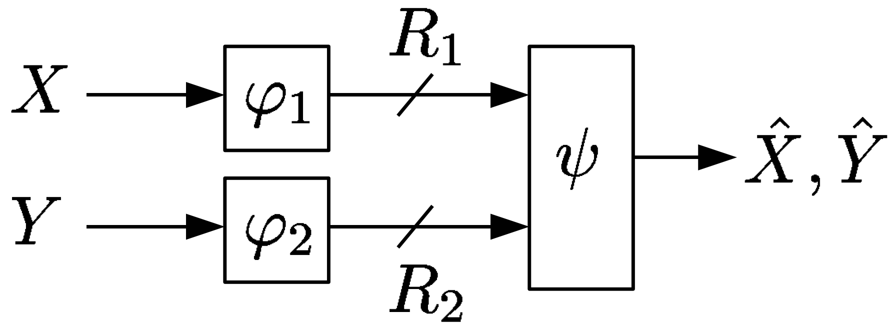
- 基本的な問題意識・数理モデル
- 重要な成果と未解決問題

1 Slepian & Wolf 符号化問題



Slepian & Wolf (1973)

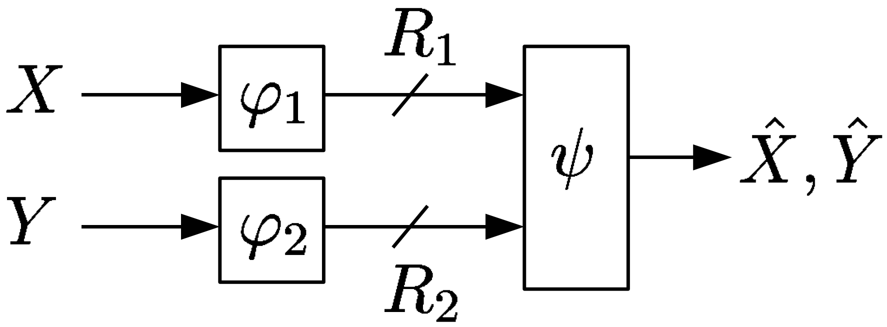
問題の枠組み（情報源）



- 集合 $\mathcal{X}$ 上の確率変数 X，集合 $\mathcal{Y}$ 上の確率変数 Y の組 (X, Y) およびその同時分布 P_{XY} を考える．
  それぞれ独立に P_{XY} に従う確率変数の組の列 $\{(X(t), Y(t))\}_{t=1}^{\infty}$ を**定常無記憶情報源**と呼ぶ．

- $\{X(t)\}_{t=1}^{\infty}$ を情報源 X と呼ぶ．またその先頭 n 文字 $X(1)X(2)\dots X(n)$ を X^n と表す．
  情報源 Y と Y^n についても同様．

問題の枠組み（符号）



- ブロックサイズnの符号は，

$$\text{符号器1}\ \ \varphi_{1,n} \colon \mathcal{X}^n \to \mathcal{M}_{1,n}$$

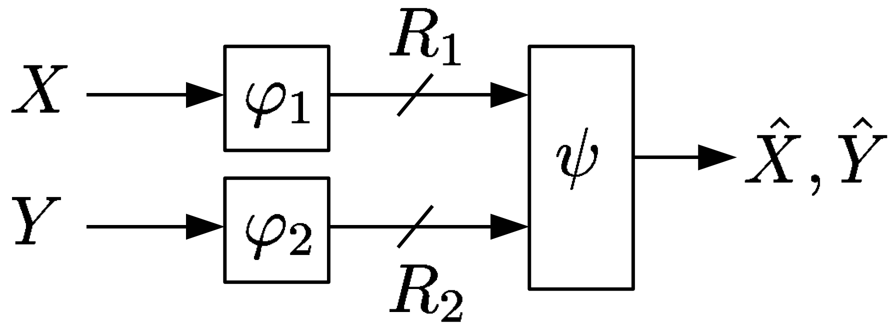
$$\text{符号器2}\ \ \varphi_{2,n} \colon \mathcal{Y}^n \to \mathcal{M}_{2,n}$$

$$\text{復号器}\ \ \psi_n \colon \mathcal{M}_{1,n} \times \mathcal{M}_{2,n} \to \mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n$$

  の組$(\varphi_{1,n}, \varphi_{2,n}, \psi_n)$によって定まる．

- 長さnの文字列$x^n \in \mathcal{X}^n$に対して，$\varphi_{1,n}(x^n) \in \mathcal{M}_{1,n}$ を x^n の符号語という．

問題の枠組み（目的）



問題は，誤り確率

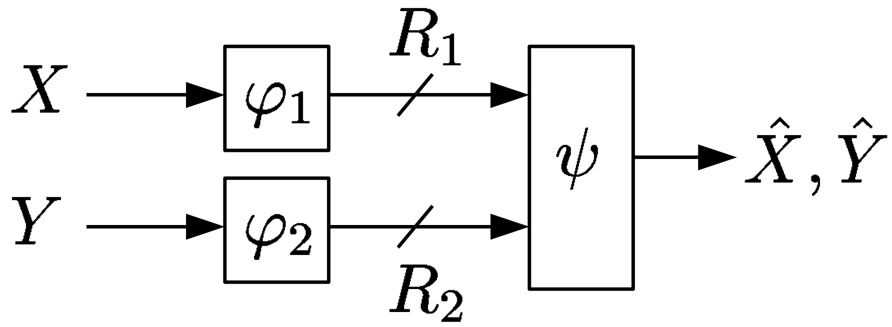
$$e_n \equiv \Pr\left\{(X^n, Y^n) \neq \psi_n(\varphi_{1,n}(X^n), \varphi_{2,n}(Y^n))\right\}$$

を十分小さくできる範囲で，符号器 $\varphi_{1,n}, \varphi_{2,n}$ **それぞれの符号化率**

$$r_{k,n} \equiv \frac{1}{n} \log |\mathcal{M}_{k,n}| \quad (k = 1, 2)$$

をどこまで小さくできるか明らかにすること．

達成可能領域の定義



(R_1, R_2) が**達成可能** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists \{(\varphi_{1,n}, \varphi_{2,n}, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ s.t.

$$\limsup_{n\to\infty} r_{1,n} \le R_1$$

$$\limsup_{n\to\infty} r_{2,n} \le R_2$$

$$\lim_{n\to\infty} e_n = 0$$

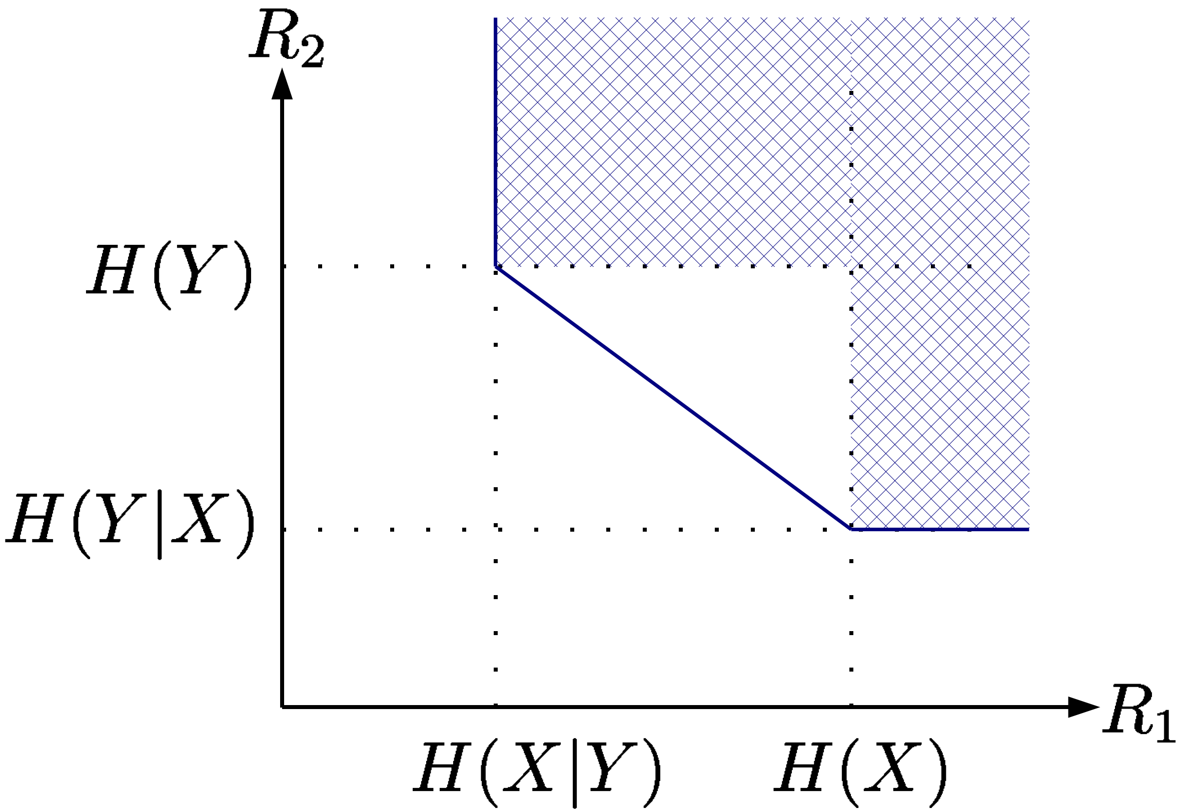
基本的な問題意識

達成可能な符号化率の範囲を明らかにするには，
　「ここまでならできる」という順定理（内界）と
　「これよりよくできない」という逆定理（外界）
を示さないとイケナイ．

情報理論的問題意識

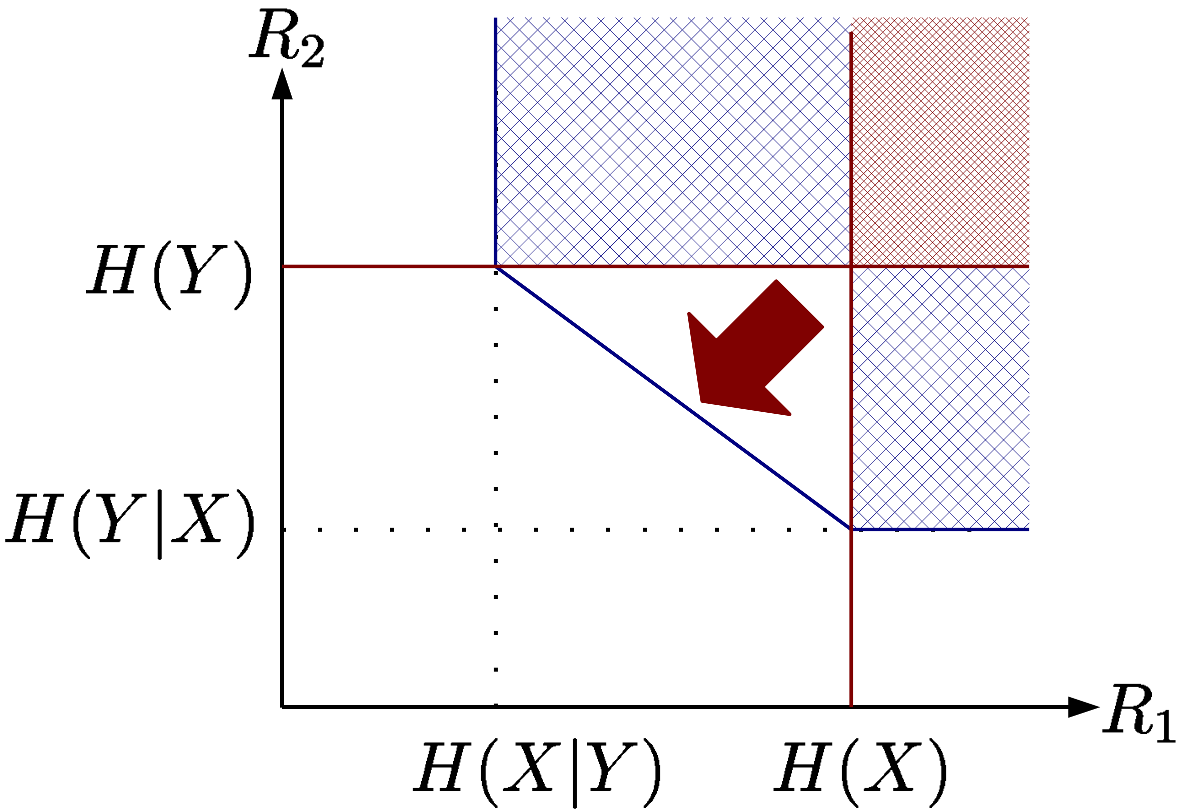
- 漸近的（$n \to \infty$）な性能をエントロピーなど計算可能な量を用いて記述することが目標．
- 内界と外界が一致したとき「問題は解けた」という．

SW 符号化の達成可能領域



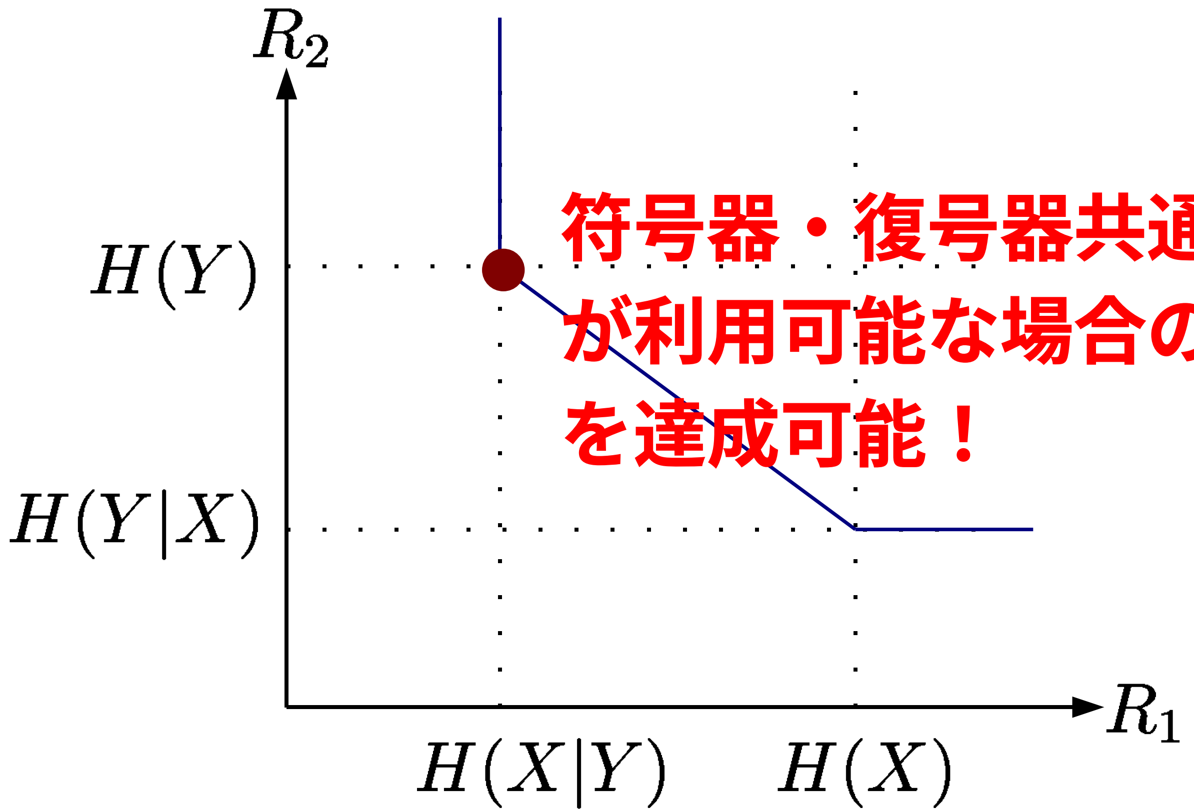
$$R_1 \geq H(X|Y)$$
$$R_2 \geq H(Y|X)$$
$$R_1 + R_2 \geq H(X,Y)$$

同時復号の効果

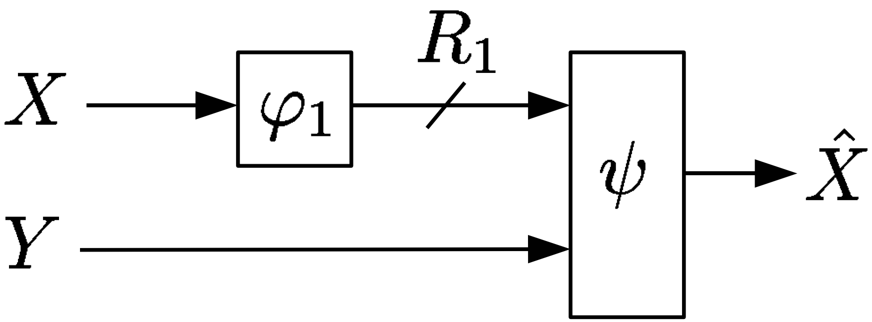


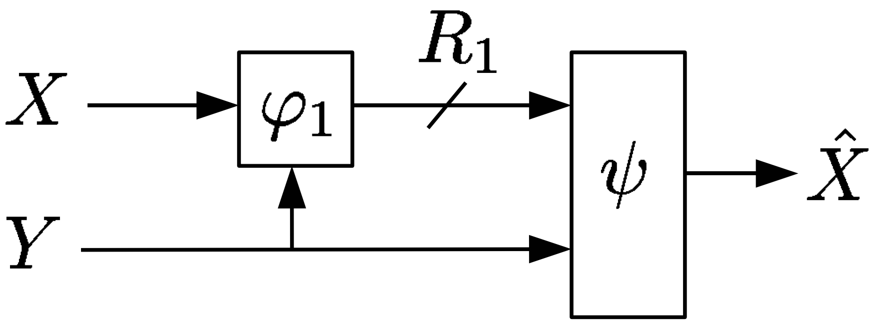
情報源 X と Y をそれぞれ個別に符号化・復号化した場合には達成できない領域も達成可能！

SW達成可能領域の頂点の意味

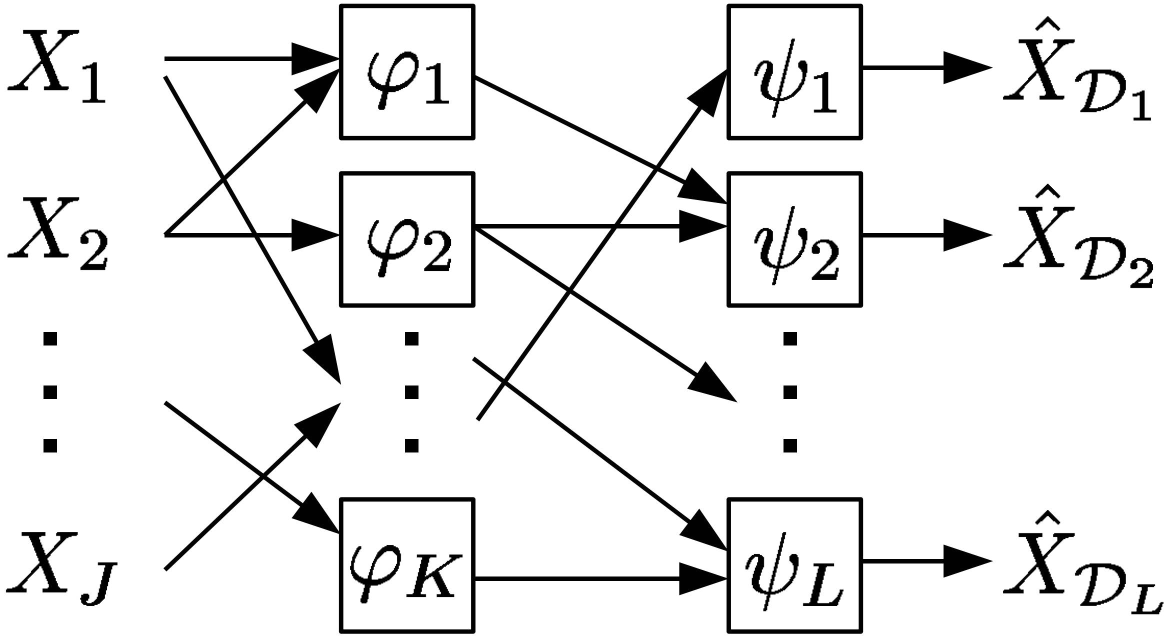


符号器・復号器共通の補助情報が利用可能な場合の最適レートを達成可能！



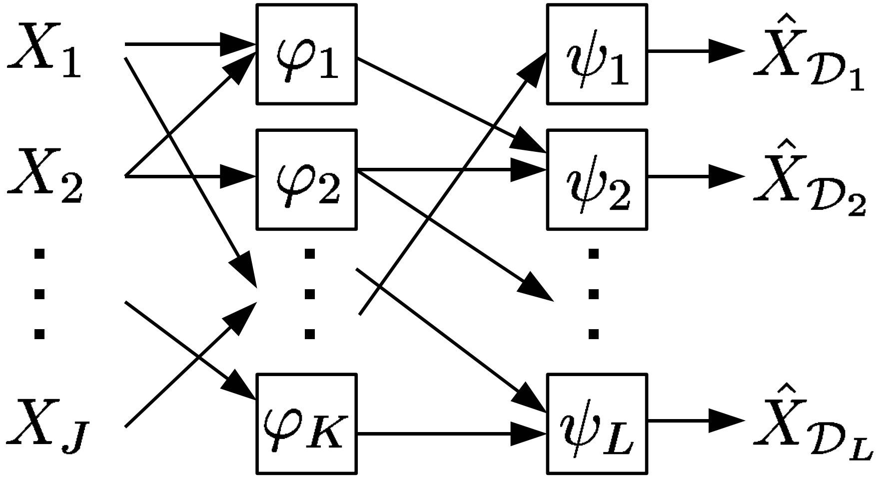


2 SW符号化の拡張

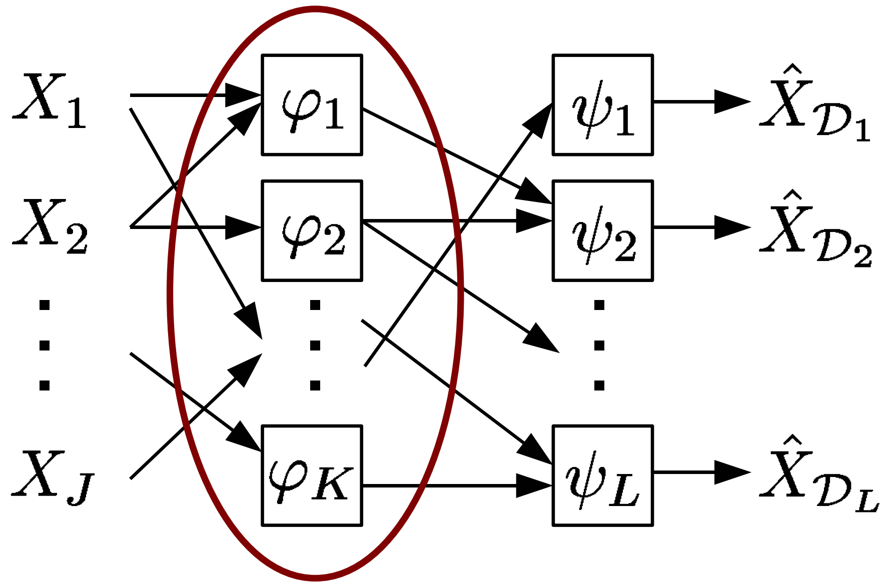


X_1
X_2
X_J
φ_1
φ_2
φ_K
ψ_1
ψ_2
ψ_L
$\hat{X}_{\mathcal{D}_1}$
$\hat{X}_{\mathcal{D}_2}$
$\hat{X}_{\mathcal{D}_L}$

一般的な情報源ネットワーク



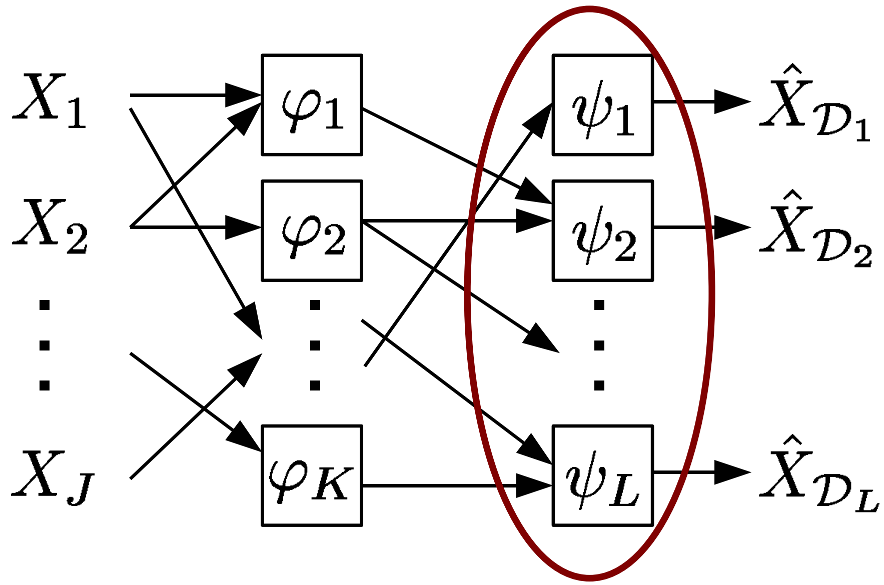
- $\mathcal{X}_j$ 上の確率変数 X_j の組 $X_{\mathcal{J}} \equiv (X_1, X_2, \ldots, X_J)$ を考える．$X_{\mathcal{J}}$ の同時分布 $P_{X_{\mathcal{J}}}$ に従う独立な確率変数の組の列 $\{X_{\mathcal{J}}(t)\}_{t=1}^{\infty}$ によって情報源を定める．
- $\{X_{\mathcal{J}}(t)\}_{t=1}^{\infty}$ から $\{X_j(t)\}_{t=1}^{\infty}$ $(j = 1, \ldots, J)$ も定まる．
- インデックス集合 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{J} \equiv \{1, 2, \ldots, J\}$ に対して，$X_{\mathcal{S}}$ で確率変数の組 $(X_j)_{j \in \mathcal{S}}$ を表す．



符号器：各符号器 φ_k $(k = 1, 2, \ldots, K)$ がつながっている情報源のインデックス集合を $\mathcal{J}_k \subseteq \{1, 2, \ldots, J\}$ とする．

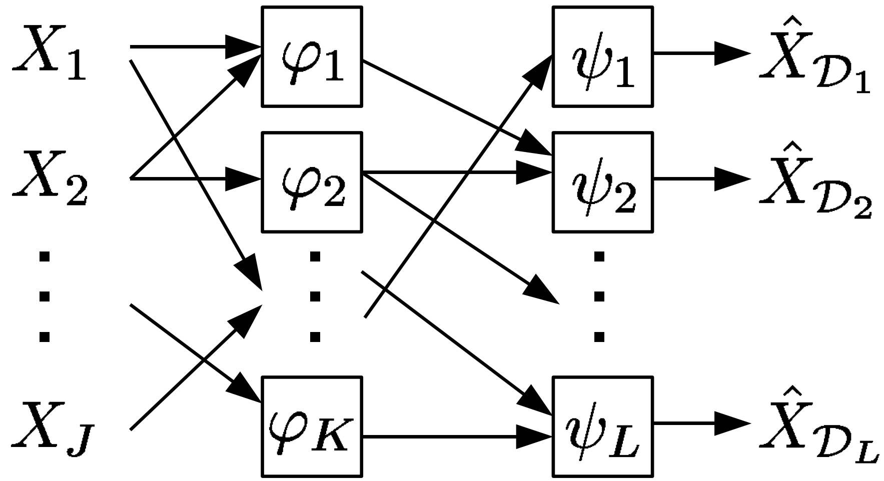
$$\varphi_{k,n} \colon \prod_{j \in \mathcal{J}_k} \mathcal{X}_k^n \to \mathcal{M}_{k,n}$$

注意：2つ以上の復号器とつながっている場合，どの復号器にも同じ符号語を送る．



復号器：各復号器ψ_l $(l = 1, 2, \ldots, L)$ がつながっている符号器および 復号するべき情報源のインデックス集合をそれぞれ$\mathcal{K}_l \subseteq \{1, 2, \ldots, K\}$，$\mathcal{D}_l \subseteq \{1, 2, \ldots, J\}$で表す．

$$\psi_{l,n} \colon \prod_{k \in \mathcal{K}_l} \mathcal{M}_{k,n} \to \prod_{j \in \mathcal{D}_l} \mathcal{X}_j^n$$



$(R_1, \ldots, R_K)$ が達成可能

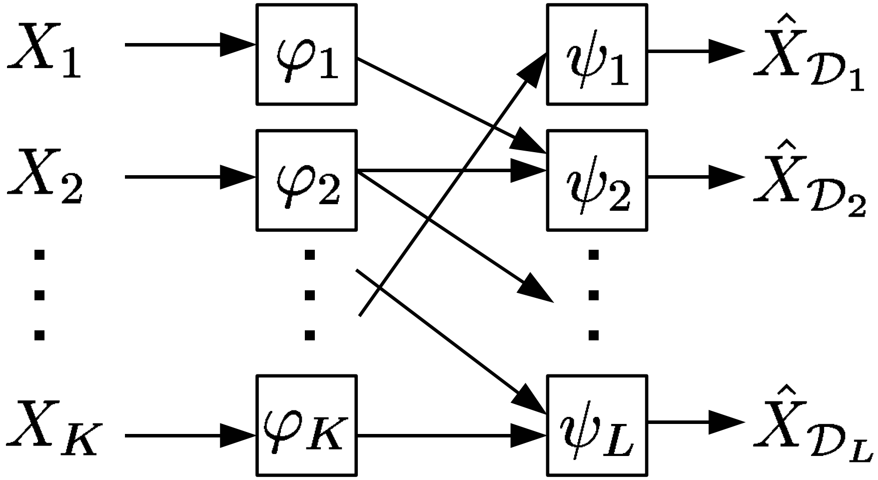
$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists \{(\varphi_{1,n}, \ldots, \varphi_{K,n}, \psi_{1,n}, \ldots, \psi_{L,n})\}_{n=1}^{\infty} \text{ s.t.}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{M}_{k,n}| \le R_k \quad (k = 1, \ldots, K)$$

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left\{X_{\mathcal{D}_l}^n \ne \hat{X}_{\mathcal{D}_l}^n\right\} = 0 \quad (l = 1, \ldots, L)$$

ただし $\hat{X}_{\mathcal{D}_l}^n$ は $\psi_{l,n}$ の出力．

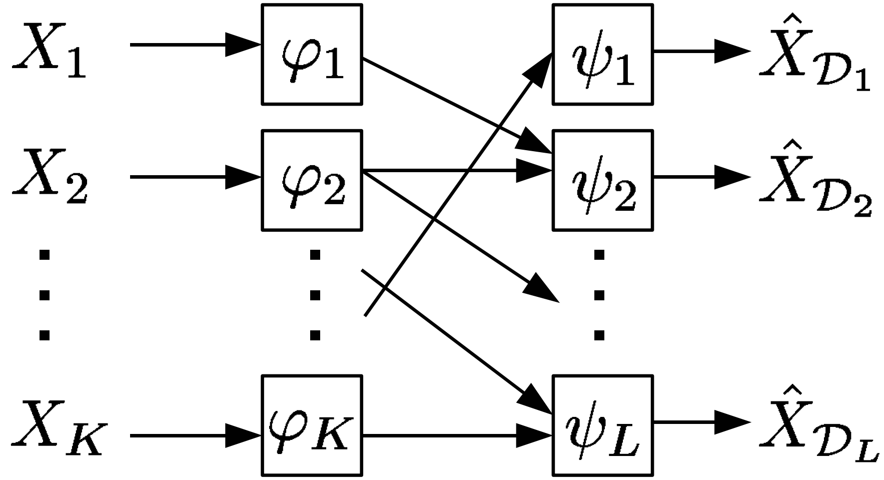
解けている問題



以下の条件を満たす場合を考える：

1. **情報源** X_k **と符号器** φ_k $(k = 1, \ldots, K)$ **は一対一に対応**
2. $l \neq \hat{l} \Rightarrow \mathcal{K}_l \neq \mathcal{K}_{\hat{l}}$
3. $\mathcal{K}_l \subset \mathcal{K}_{\hat{l}} \Rightarrow \mathcal{D}_l \subset \mathcal{D}_{\hat{l}}$
4. $k \in \mathcal{D}_l \Rightarrow k \in \mathcal{K}_l$
5. $k \in \mathcal{K}_l \Rightarrow k \in \mathcal{D}_l$　　← 4, 5**から** $\mathcal{K}_l = \mathcal{D}_l$

解けている問題



定理 [Csiszár & Körner (1980)]

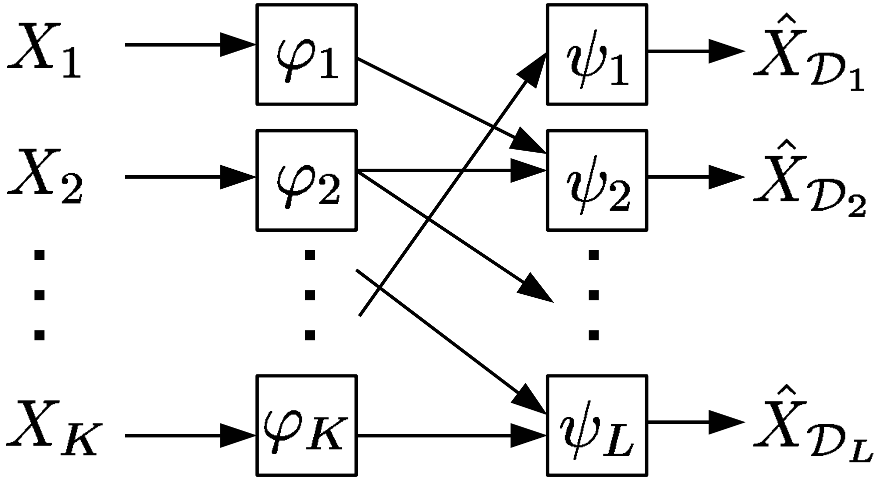
$(R_1, \ldots, R_K)$ **が達成可能**

$$\Updownarrow$$

すべての $l = 1, 2, \ldots, L$ **と** $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}_l$ **に対して**

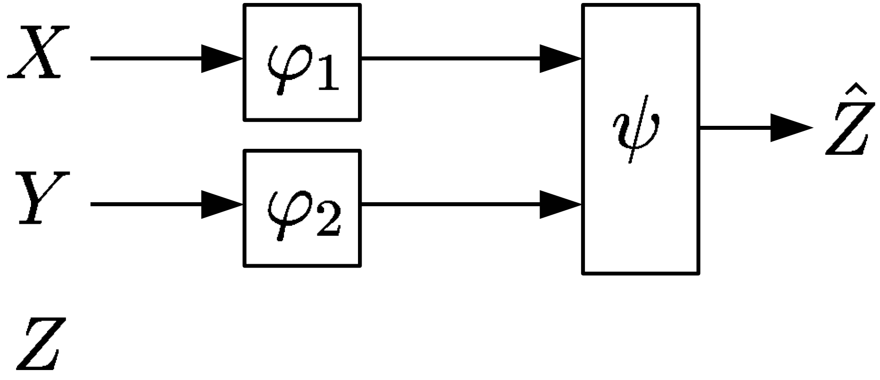
$$\sum_{k \in \mathcal{S}} R_k \geq H(X_{\mathcal{S}} | X_{\mathcal{K}_l \setminus \mathcal{S}})$$

補足説明



- **実際には，定理は冗長な制約式を除いた形で示されている．**
- Csiszár & Körner **の論文では，一般的なネットワークから，達成可能領域を変えることなく条件** 1 **から** 3 **を満足するようにネットワークを変換する手法も示されている．**
- Csiszár & Körner **は符号化の誤り指数まで導出している．**

4番目，5番目の条件について

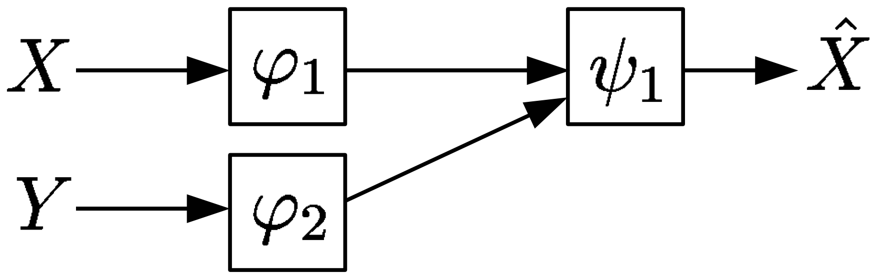


- 4番目の条件 $k \in \mathcal{D}_l \Rightarrow k \in \mathcal{K}_l$ が満たされていないと，一見どうしようもない（例：Z が X, Y と独立）．
- しかし，$Z = f(X, Y)$ の場合は，計算機科学分野の分散計算とも関係がある重要な問題．一般的に未解決．
- 難しさは，X, Y は復号器側で復元しなくてよい点にある（X, Y も復元するならその後で $Z = f(X, Y)$ を計算すればよい）．

ヘルパーありの符号化問題

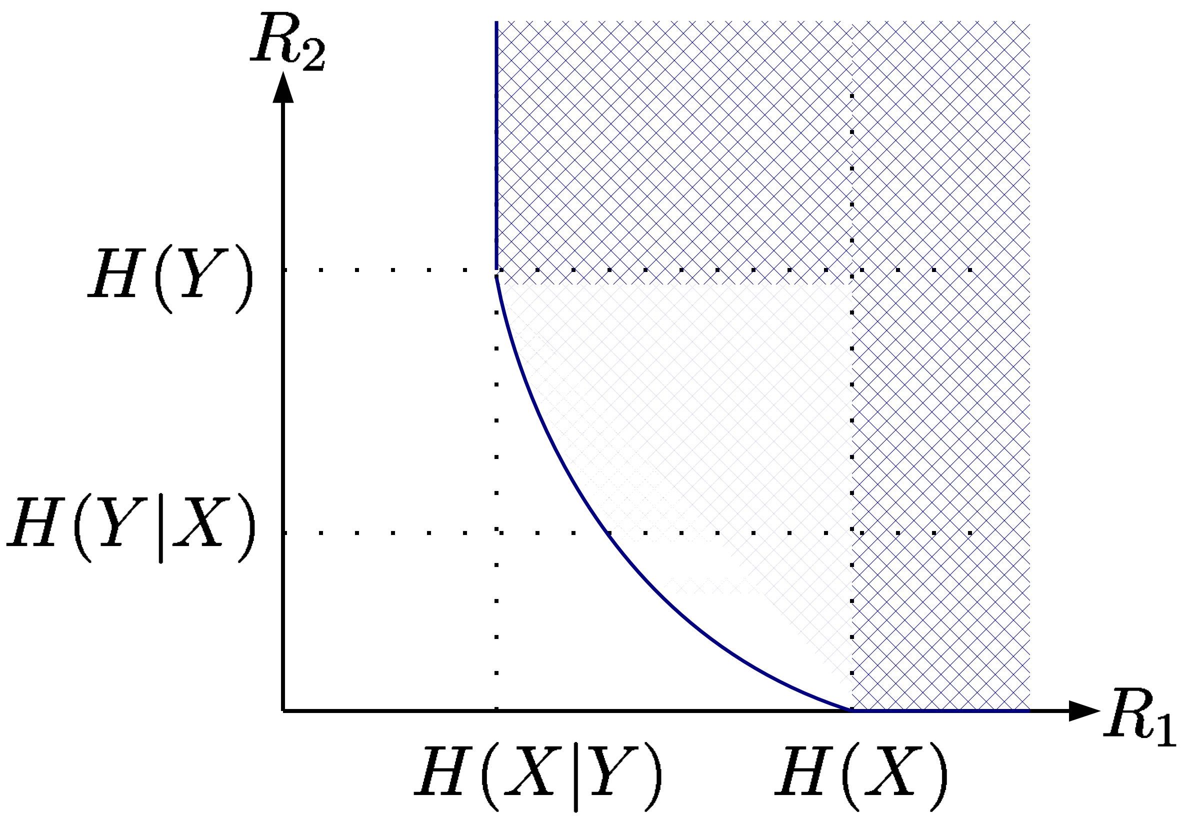
- $k \in \mathcal{K}_l$ かつ $k \notin \mathcal{D}_l$ となる l が存在する φ_k を**ヘルパー**と呼ぶ．
- つまり，5 番目の条件 $k \in \mathcal{K}_l \Rightarrow k \in \mathcal{D}_l$ は「ヘルパーが存在しない」という制約になっている．
- ヘルパーがある場合の符号化問題では，一般的に，達成可能領域を記述するためには**補助確率変数**を導入する必要がある．
- 補助確率変数の導入に対応して，符号も**子持ち符号** (piggyback code) と呼ばれる符号化手法が導入された．

Wyner (1975), Ahlswede & Körner (1975)

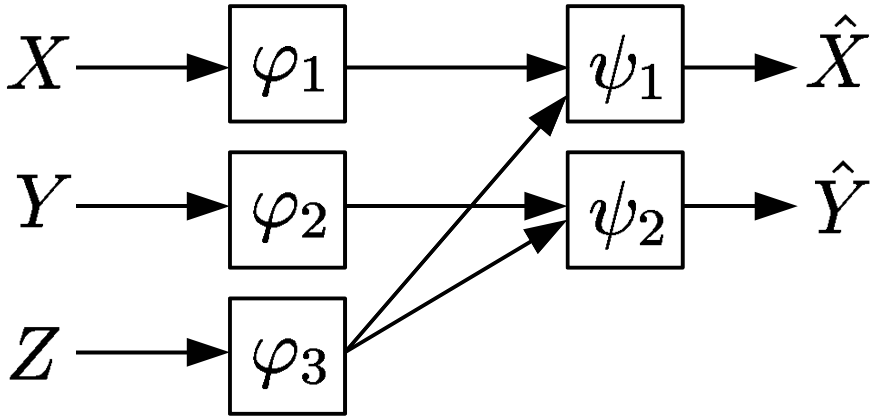


$$R_1 \geq H(X|U)$$
$$R_2 \geq I(Y;U)$$

ただし $U \leftrightarrow Y \leftrightarrow X$
かつ $|\mathcal{U}| \leq |\mathcal{Y}| + 2$.



Wyner (1975)



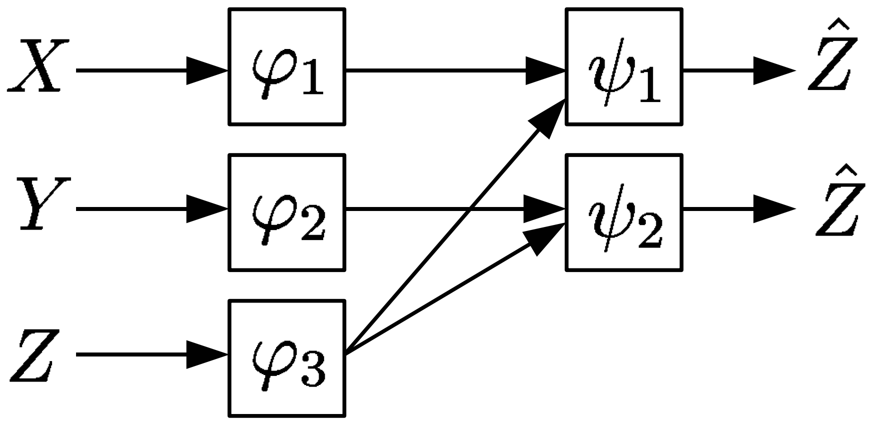
$$R_1 \geq H(X|U)$$

$$R_2 \geq H(Y|U)$$

$$R_3 \geq I(Z;U)$$

ただし$U \leftrightarrow Z \leftrightarrow XY$ かつ$|\mathcal{U}| \leq |\mathcal{Z}| + 2$.

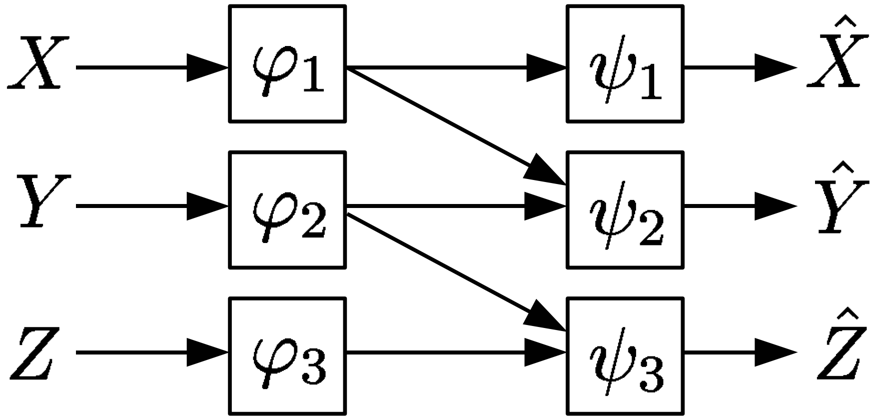
Sgarro (1977)



$$R_1 \geq \max\{H(X|U), H(Y|V)\}$$
$$R_2 \geq I(Y;U)$$
$$R_3 \geq I(Z;V)$$

ただし$U \leftrightarrow Y \leftrightarrow X$，$V \leftrightarrow Z \leftrightarrow X$，$|\mathcal{U}| \leq |\mathcal{Y}| + 2$，$|\mathcal{V}| \leq |\mathcal{Z}| + 2$．

Körner & Marton (1977)



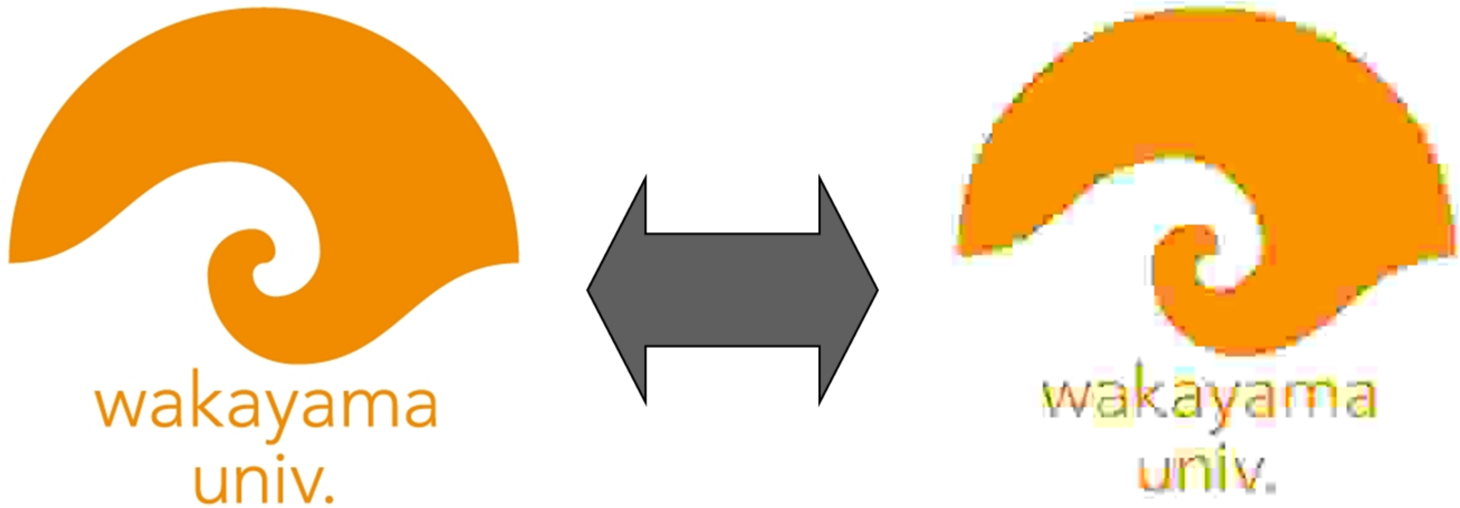
$$R_1 \geq H(X)$$
$$R_2 \geq H(Y|X) + I(X;U) - r$$
$$R_3 \geq H(Z|U) + r$$

ただし$0 \leq r \leq I(X;U)$，$U \leftrightarrow Y \leftrightarrow XZ$，$|\mathcal{U}| \leq |\mathcal{Y}| + 2$．

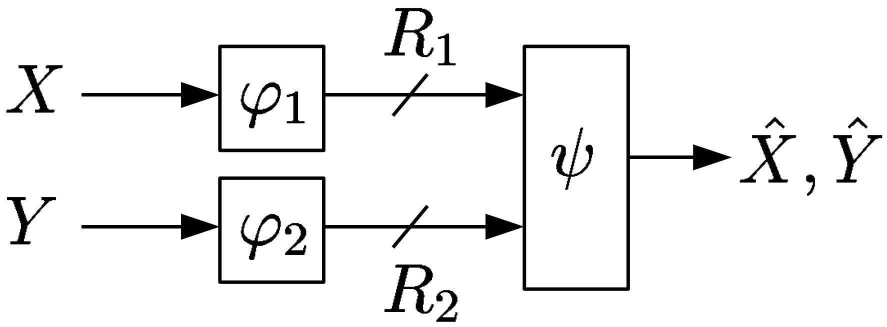
一般的なヘルパーありの符号化問題

- Han & Kobayashi (1980) は子持ち符号の理論の拡張（Markov Lemmaの一般化）により，かなり一般的な問題に対して内界（順定理）を示している．
- Han & Kobayashiの順定理で示された内界は，上述のWyner-Ahlswede-Körner, Wyner, Sgarro, Körner-Martonの各問題の場合にはタイトであることも示されている．
- しかしながら，ヘルパーを含む符号化問題も一般的には未解決．

3 歪みを許容する多端子情報源符号化



2対1有歪み符号化問題（歪み測度・符号）



歪み測度（$\hat{\mathcal{X}}, \hat{\mathcal{Y}}$ を復元アルファベットと呼ぶ）：

$$d_1 : \mathcal{X} \times \hat{\mathcal{X}} \to [0, \infty)$$

$$d_2 : \mathcal{Y} \times \hat{\mathcal{Y}} \to [0, \infty)$$

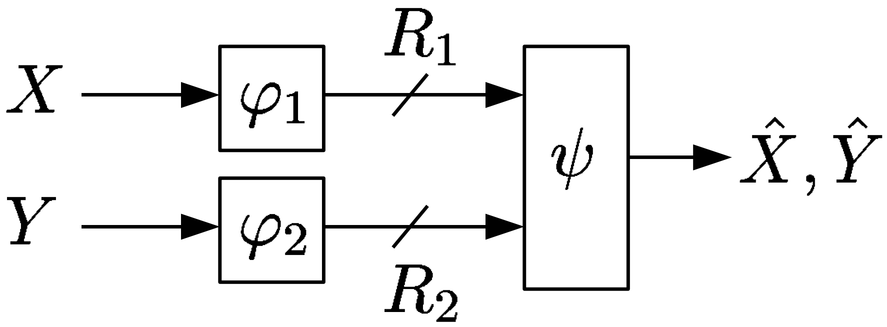
符号器・復号器：

$$\varphi_{1,n} : \mathcal{X}^n \to \mathcal{M}_{1,n}$$

$$\varphi_{2,n} : \mathcal{Y}^n \to \mathcal{M}_{2,n}$$

$$\psi_n : \mathcal{M}_{1,n} \times \mathcal{M}_{2,n} \to \hat{\mathcal{X}}^n \times \hat{\mathcal{Y}}^n$$

2 対 1 有歪み符号化問題（歪みの評価）

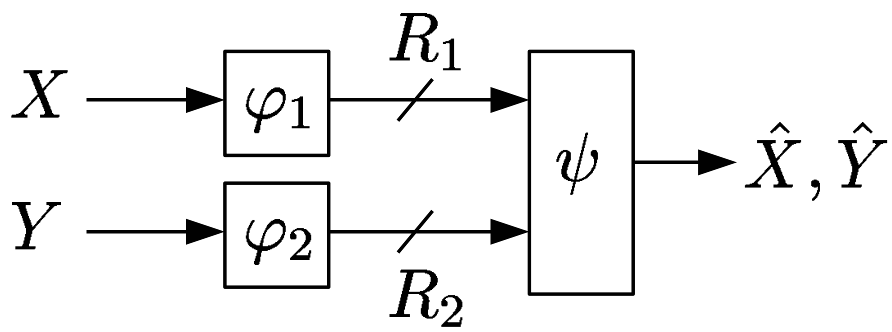


情報源からの出力 (X^n, Y^n) と復号結果
$(\hat{X}^n, \hat{Y}^n) \equiv \psi_n\left(\varphi_{1,n}(X^n), \varphi_{2,n}(Y^n)\right)$ との歪みを考える：

$$\Delta_{1,n} \equiv \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} d_1(X(t), \hat{X}(t))$$

$$\Delta_{2,n} \equiv \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} d_2(Y(t), \hat{Y}(t))$$

2対1有歪み符号化問題（達成可能領域）



(R_1, R_2) が (D_1, D_2)-**許容**

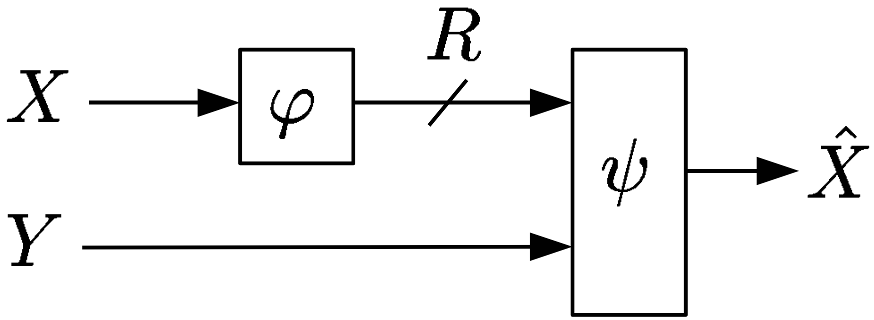
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists \{(\varphi_{1,n}, \varphi_{2,n}, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ s.t.

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{M}_{k,n}| \le R_k \quad (k = 1, 2)$$

$$\limsup_{n\to\infty} \Delta_{k,n} \le D_k \quad (k = 1, 2)$$

一般的には未解決！

Wyner & Ziv (1976)

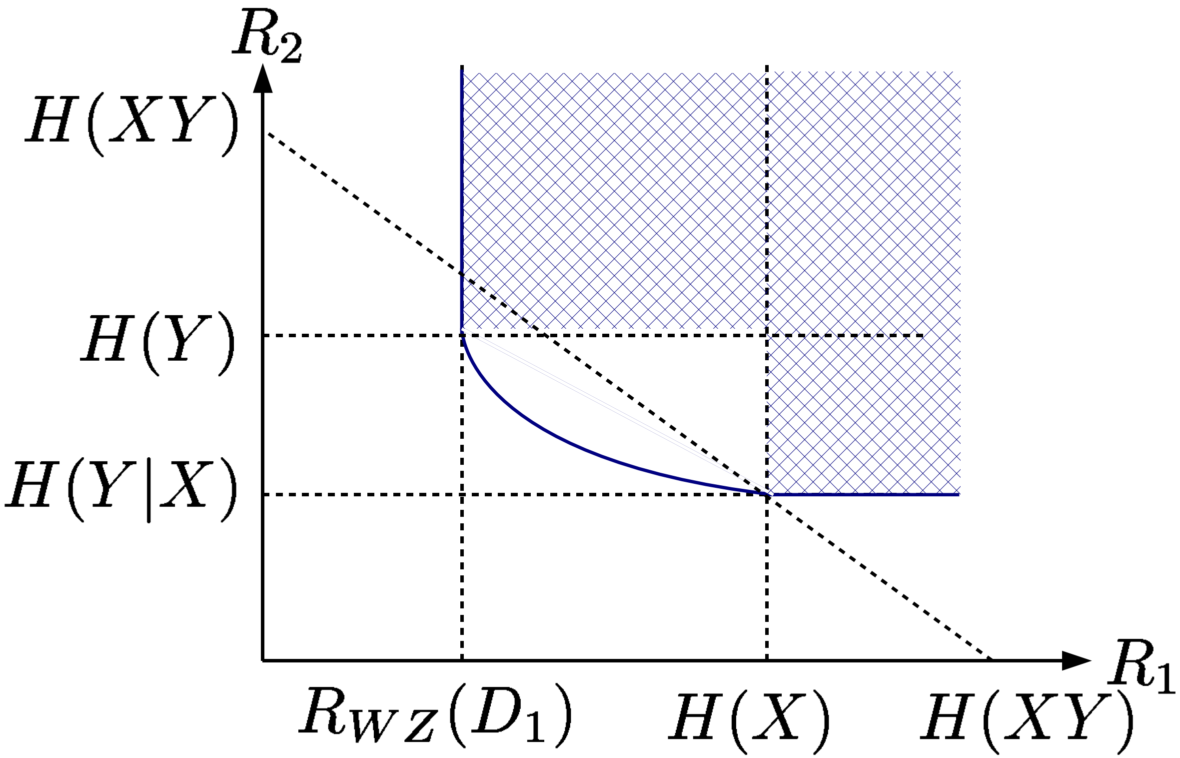


復号器がY**を観測できる（**$R_2 \geq H(Y)$**）とき：**
$\mathbb{E}[d(X,\hat{X})] \leq D$**となるように復元できる符号化率の下限は**

$$R_{WZ}(D) = \min_{U,f} I(X;U|Y)$$

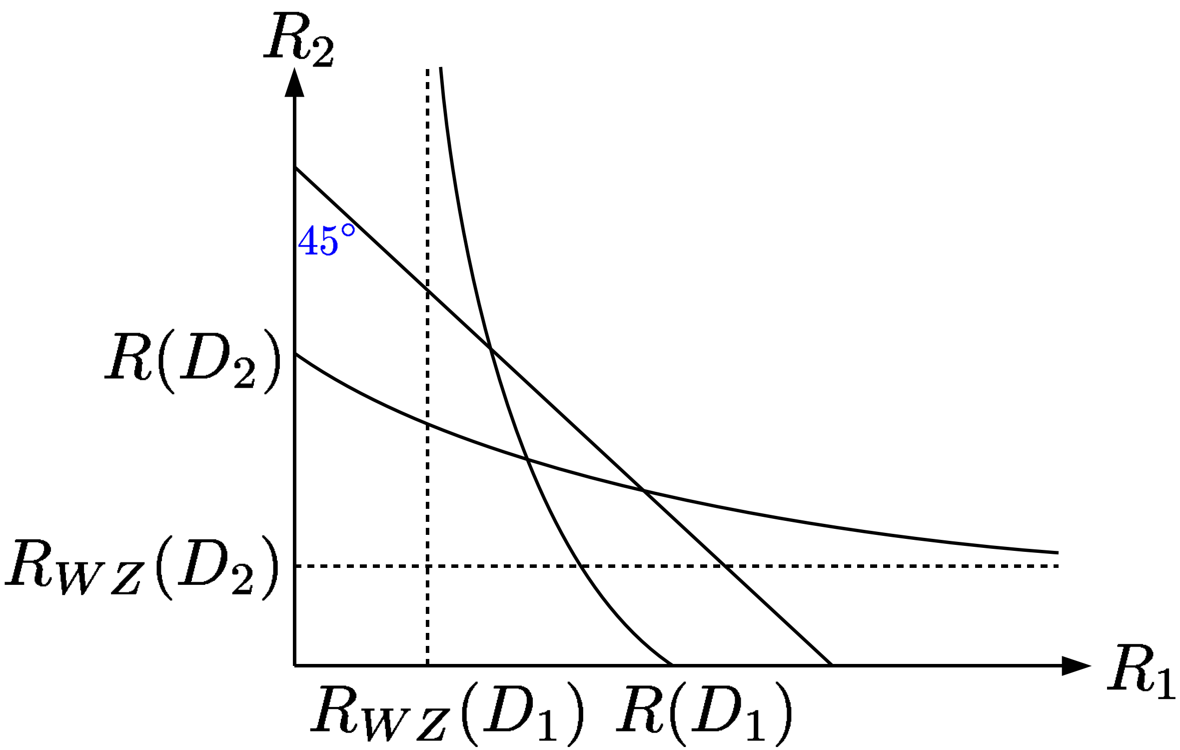
ただし$\min$**は**$U \leftrightarrow X \leftrightarrow Y$, $|\mathcal{U}| \leq |\mathcal{Y}| + 1$**および**
$\mathbb{E}\left[d(X, f(Y,U))\right] \leq D$**を満たす補助確率変数**$U$**と関数**
$f\colon \mathcal{Y} \times \mathcal{U} \to \hat{\mathcal{X}}$**とについてとられる．**

片方の許容歪みが0の場合



情報源Yに対する許容歪みを$D_2 = 0$とした場合の達成可能領域は，Kaspi & Berger (1982) **や** Berger & Yeung (1989) **によって与えられた．**

ガウス形情報源・平均二乗誤差歪みの場合



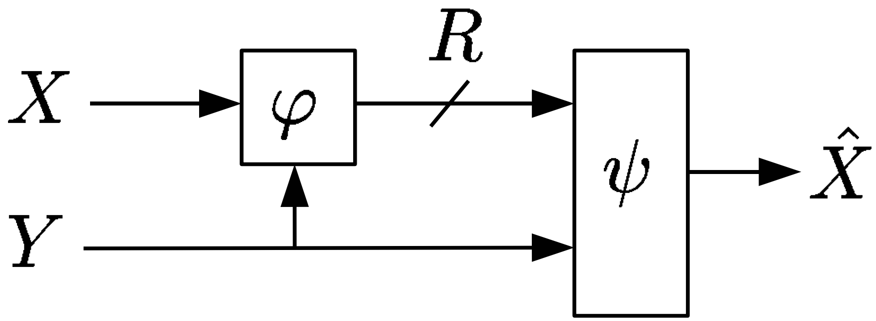
Berger (1977) と Tung (1978) が領域の内界を与えた．

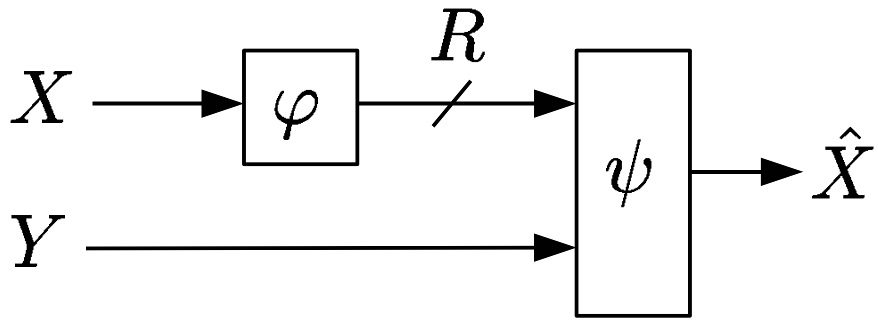
Oohama (1997) が曲線部分は最適であることを証明．

最近 Wagner ら (2008) が直線部分も最適であることを証明．

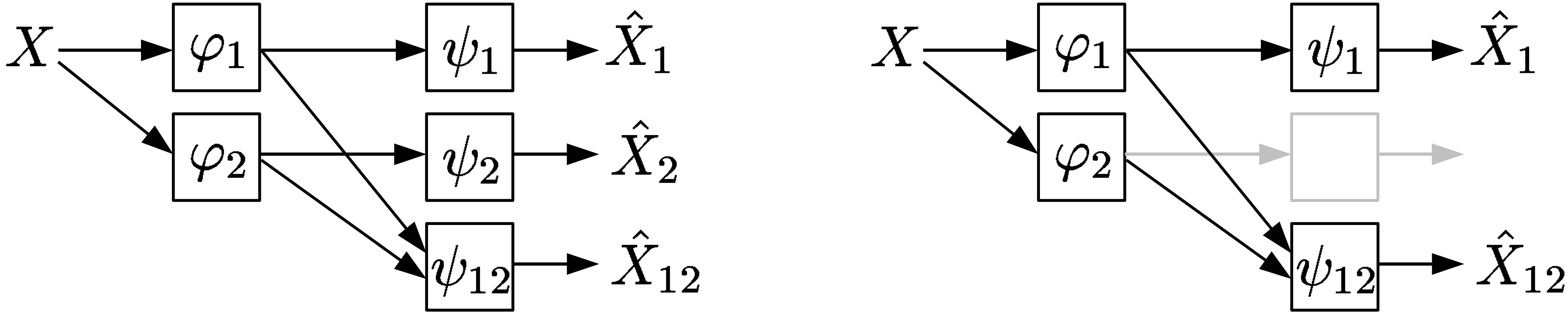
情報源が 3 つ以上の場合への拡張はまだ．

応用側からの関心





- 動画の符号化では，符号器と復号器が前のフレームを共通の補助情報として利用できる（上左図の問題）
- 最近，符号器の計算量を削減するために，前のフレームを復号器のみで利用する手法が注目されている（上右図）
  $\Rightarrow$ WZ 問題！
- ただし，SW 符号化とは違い，歪み有りの場合は符号器が補助情報を利用する／しないで最適符号化率に差が出る．



- **動画配信などの応用上で重要な問題として** Multiple Description (MD) **がある（上左図）．一般的には未解決．**
- Successive Refinement **も** MD **問題の特別な場合として考えられる（上右図）．**

  Successive Refinable **である（すなわち** 1 **段目・** 2 **段目ともに最適なレート・歪みのトレードオフを達成できる）ための必要十分条件などが明らかにされている．**

最後に

- 基本的な問題の枠組みを説明し，重要な成果と未解決問題を駆け足で紹介した．
- 一見すると「解けそうな問題は解けていて，未解決問題には手が出せない」という閉塞状態にある．
- それでも地道な研究が続いており，境界を記述する制約式をよりタイトにするための証明手法も発展中．

- 語り残したことの方が多いが，最新の面白いトピックはこの後の３人の講演をお楽しみに！