情報論的学習理論テクニカルレポート 2009
Technical Report on Information-Based Induction Sciences 2009 (IBIS2009)

非線形プリコーディングの統計力学的解析
Statistical Mechanics of Non-Linear Precoding

林 愛空* 樺島 祥介†
Naruhiro Hayashi Yoshiyuki Kabashima

Abstract: We investigate a nonlinear precoding scheme of MIMO communication, which aims to reduce the transmit energy, utilizing methods of statistical mechanics. In the scheme, a message to be transmitted to a receiver is expanded to a space of relaxed alphabets and replaced by a sequence which has the minimum transmit energy in that space. Since this process can be considered as a combinatorial optimization problem, statistical mechanics can be used for estimating a performance. Recently, Mueller et al.(2008) investigated the performance of this scheme using the replica method under the replica symmetric ansatz. However, the analysis seems inadequate even in qualitative aspects. Therefore, we handle the same problem in a more advanced framework based on the one-step replica symmetry breaking ansatz. In addition, by using mean field approximation, practical algorithms, which achieve nearly optimal performance with a reasonable amount of time, are developed.

Keywords: MIMO, precoding, replica method, complexity, TAP equation.

1. はじめに

近年，無線通信の普及に伴い，通信のさらなる高速化，高品質化が求められている．そのような状況の下で，限られた周波数帯域で伝送容量を増大させる方法として，複数の送受信アンテナを用いることで空間的な冗長性を利用して大容量通信を実現するMIMO 通信[1]が注目を集めている．ただし，同じ周波数で複数の信号を同時に送るため，干渉しあった受信信号からいかに元の信号を復元するかという問題が生じる．この干渉を抑えるために，あらかじめ送信機側で干渉成分の減算（線形プリコーディング）を行うことがあるが，この際，送信電力の増大が問題となる．この問題に対して，緩和された信号空間の中で送信電力が最小となるような信号に元信号を符号化することで送信電力を低減させる非線形プリコーディング[2][3]を考えることができる．この非線形プリコーディングは組合せ最適化問題とみることができるため，送信電力の低減限界の評価や，与えられた信号からできるだけ電力を下げた信号を求める実際的なプリコーディングのアルゴリズムを与えることは，厳密に行う限り計算困難な問題となる．

さて，最近情報科学の問題に対して統計力学で用いられてきた手法が有効であることが認識され，情報通信をはじめ，さまざまな問題に適用することが試みられている[4]．プリコーディングの解析においても，統計力学的手法による解析が有効であり，最近ランダム系の統計力学的手法であるレプリカ法による送信電力低減限界の評価がおこなわれた[5]．ただし，このレプリカ法は様々な仮定から成り立っているため，適切な解の振舞いを得るためには注意が必要である．上記解析は最も単純な仮定であるReplica symmetry(RS)仮定のもとで解析が行われたが，送信電力低減限界のシステムサイズ依存性が数値実験の結果と大きく食い違うなど系の振舞いを定性的にも捉えきれていないと考えられる．

そこで，本稿ではより進んだ仮定である one step Replica symmetry breaking(1 RSB)仮定[6]のもとでレプリカ法による解析を行う．1RSB 仮定はその特殊な状況として RS 仮定を含み，RS 仮定に比べて評価関数の構造に対して，より詳細な解析を行うため，高い精度で定性的によりよい結果を得られることが期待できる．さらに，上記の非線形プリコーディングに対して統計力学で知られている平均場近似を用いることで，実際的な符号化アルゴリズムを与える．また， RSB 仮定において仮定される多数の準安定解

*東京工業大学 大学院総合理工学研究科 知能システム科学専攻, 〒226-8502 横浜市緑区長津田町 4259, tel. 045-924-5544, e-mail: hayashi@sp.dis.titech.ac.jp,
Department of Computational Intelligence and Systems Science, Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology, 4259 Nagatsuta, Midori-ku, Yokohama 226, Japan
†同上, tel. 045-924-5643, e-mail: kaba@dis.titech.ac.jp,

と，アルゴリズムの平均的な性能との間に興味深い関係が得られることについても報告する．

2. プリコーディング

MIMO 通信とは送信側，受信側それぞれに複数のアンテナを用いることで大容量，高品質の情報伝送を行う無線通信技術である．

以下では，送信アンテナ N 本，受信アンテナ K 本の MIMO 通信を表す数理モデル

$$r = \mathbf{H}t + n$$

を考える．ここで，H は $K \times N$ で要素が平均 0，分散 $1/N$ のガウス分布からなる通信路行列，r は受信信号，t は送信信号，n は平均 0，分散 $1/N$ のガウスノイズである．

K 次元の信号 $\mathbf{s} = \{\pm 1\}^K$ を送信する場合，N 本のアンテナから送信するため，N 次元の送信信号へ $t = T(\mathbf{s})$ と符号化して送信することになるが，MIMO 通信ではそれぞれのアンテナから送信された信号が干渉しあって受信されるため，受信信号から送信信号を推定する必要がある．

送信機側で通信路の状態が既知の場合，次のプリコーディングと呼ばれる送信機側で行う符号化方式を考えることができる．

送信機側で通信路の一般化逆行列により送信したい信号を

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}^{\dagger}(\mathbf{H}\mathbf{H}^{\dagger})^{-1}\mathbf{s}$$

と符号化し，x をアンテナから送信する．すると

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n} \\ &= \mathbf{H}\mathbf{H}^{\dagger}(\mathbf{H}\mathbf{H}^{\dagger})^{-1}\mathbf{s} + \mathbf{n} \\ &= \mathbf{s} + \mathbf{n}\end{aligned}$$

となり，このような線形プリコーディングを施すことで，符号化された送信信号が送信時に通信路で自動的に復号されることになる．

この方式では受信機での復号作業を必要としないため，受信機の簡略化や消費電力を抑えたい場合，例えば携帯電話の基地局から端末へのダウンリンクなど，受信機でのコストを削減したい場合に有利である．しかし，送信機側では

$$\mathbf{x}^{\dagger}\mathbf{x} = \mathbf{s}^{\dagger}(\mathbf{H}\mathbf{H}^{\dagger})^{-1}\mathbf{s} > \mathbf{s}^{\dagger}\mathbf{s}$$

となり，送信電力の増大をまねくことになる．そこで，この問題を解決するために，線形プリコーディングの前に Tomlinson-Harashima Precoding[2][3]と呼ばれる非線形プリコーディングを導入する．

今，$s = \{\pm 1\}$ に対応した互いに素な緩和された集合 $\mathrm{B}_{\pm 1} = \{\mp 1, \pm 3\}$ を考える（図２）．s から $\mathrm{B}_{\pm 1}$ に符号化した場合，$\mathrm{B}_{\pm 1}$ が互いに素な集合であるため，B_{+1} の要素を受信した場合 $s = 1$，B_{-1} の要素を受信した場合 $s = -1$ と簡単に復号することができる．このため，非線形プリコーディングにより受信機側での復号コストを増加させることなく，符号化時の信号空間を緩和することができる．この緩和された信号空間から

$$f = \frac{1}{K}\min_{\mathbf{b}\in\mathbf{B}(\mathbf{s})} \mathbf{b}^{\dagger}(\mathbf{H}\mathbf{H}^{\dagger})^{-1}\mathbf{b} \qquad (2.3.1)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{s}) = \mathrm{B}_{s_1} \times \mathrm{B}_{s_2} \times \cdots \mathrm{B}_{s_K}$$

のように，最も送信電力の低い信号を選び，元の信号をこの信号に符号化すれば送信電力を低減させることができる．これが非線形性を用いた送信電力低減プリコーディングの原理である．

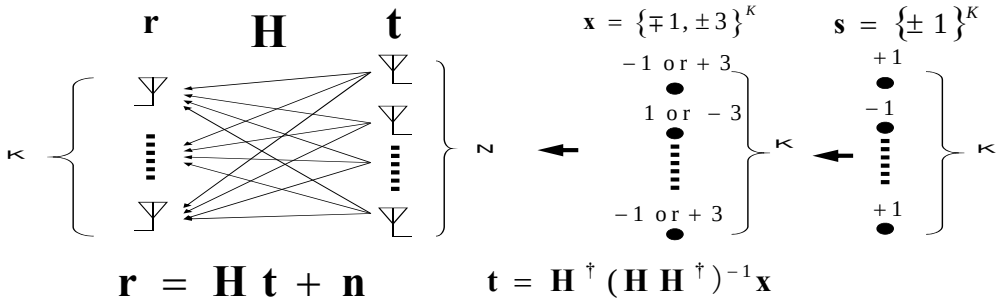

図 1　MIMO 通信

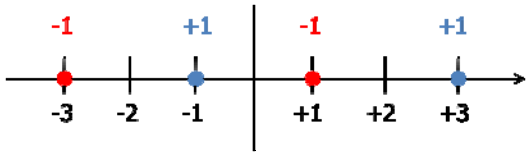

図 2　緩和された信号空間

3. 統計力学

3.1 自由エネルギー形式

MIMO 通信における送信電力を低減させるための非線形プリコーディングは，緩和された信号空間の中からもっとも送信電力が小さくなる信号を探す組合せ最適化問題と見ることができる．本節ではなぜ統計力学がこのような問題の評価に役に立つのかということと，そこで使われる手法について概説する．

イジングスピンと呼ばれる $s=\{\pm 1\}$ をとる N 個の構成要素からなる系を考える．各状態を N 次元ベクトル $\mathbf{s}=\{s_1,s_2,...,s_N\}$ によってあらわす．系の状態 $\mathbf{s}$ が見出される確率は，エネルギー関数と呼ばれる系を特徴づける評価関数 $E(\mathbf{s})$ のもと次のように表わされる．

$$P(\mathbf{s})=\frac{1}{Z}e^{-\beta E(\mathbf{s})}$$

これはボルツマン分布とよばれる．ここで規格化因子 Z は

$$Z=\sum_{\mathbf{s}}e^{-\beta E(\mathbf{s})}$$

であり，分配関数と呼ばれる．またエネルギーに共役な変数 β は逆温度と呼ばれている．

エネルギー関数による確率分布に対するキュムラント母関数は，システムサイズ無限の極限で以下のようにレート関数 S のルジャンドル変換として表すことができる

$$\begin{aligned}-\beta F&=\log Z\\&=\log\int d\mathbf{s}\exp\left(-\beta E(\mathbf{s})\right)\\&=\log\int dE\exp\left(-\beta E\right)W(E)\\&\approx-\beta E^{*}+S(E^{*})\end{aligned}$$

ここで F は自由エネルギー，$W(E)$ は状態数，$S(E)=\log W(E)$ はエントロピーと呼ばれ，３行目において鞍点法を用いている．

これは状態集合を同じエネルギーE をとる状態のサブシェルに分割し逆温度でパラメトライズしていることに相当する．そのため直接状態を意識することなしに温度を動かすことで，とりうるエネルギーの範囲を調べることができる．$\beta\to\infty$ に対応するエネルギーが最小エネルギーに対応するので，これを調べることで式(2.3.1)を評価することが可能となる．

このように大自由度極限を考えることで全状態を同じ巨視的な変数の値を持つ典型集合に分割することができるため，最適化問題において最小値の値を求めるのに統計力学の手法が有効となる．

3.2 レプリカ法

3.1 で導入した自由エネルギーは，相互作用が固定された系，つまりある固定された通信路でのエネルギーである．しかし，通信路行列は要素が確率変数であるランダム行列で与えられるため，平均的な送信電力を評価するために，自由エネルギーの平均値を求めなければならない．しかし，対数の平均を求めるのは一般に困難である．そこで，次の恒等式

$$\ln Z=\lim_{n\to 0}\frac{Z^{n}-1}{n},\ (n\in\mathbb{R})$$

を用いて

$$\overline{\ln Z}=\lim_{n\to 0}\frac{1}{n}\ln\overline{Z^{n}}$$

とすることで平均を求める．ここで $\overline{\ }$ は通信路行列による平均操作を表す．分配関数の実数乗の期待値を求めることは依然困難であるが，n が整数のときに限り分配関数の n 次モーメントの計算が可能であるため，n の実数への解析接続が可能であるという仮定のもと $n\to 0$ とすることで期待値を評価することができる．この方法は同一の n 個の系を扱っているように見えることから，レプリカ法と呼ばれている．レプリカ法は実数への解析接続や鞍点評価など，数学的な正当性のない操作を含むが，多くの例を通して経験的に正しい解を与える操作が処方箋として確立されている．

4. 統計力学によるプリコーディングの評価

4.1 RS 仮定

前節の議論より，送信電力の低減限界を評価するために，(2.3.1)をエネルギー関数とする自由エネルギーをレプリカ法により評価する．以下の定式化[7]は，若干異なるものの，Mueller *et al* が採用したものと同じ仮定に基づき，彼らの結果[5]と全く同じ結果を導く．詳細にはふれないが有限温度での自由エネルギーは，巨視的な状態を特徴づける秩序変数と呼ばれる変数の極値として，

$$f(\beta) = \lim_{n\to 0} \operatorname*{ext}_{m^a, q^{ab}} \mathrm{f}\left(\left\{m^a, q^{ab}\right\}\right)$$

ここで

$$m^a \equiv \frac{1}{K}\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\tau}^a \quad q^{ab} \equiv \frac{1}{K}\boldsymbol{\tau}^a\cdot\boldsymbol{\tau}^b$$

$$\boldsymbol{\tau} \equiv \frac{\mathbf{b}-\mathbf{s}}{2}$$

と表すことができる．

ここで秩序変数に対して次の仮定（RS 仮定）を置く

$$m^a = m, \quad q^{ab} = q$$

この仮定は自由エネルギーの解構造に対して単峰的な仮定を置くことに相当する．

$\beta\to\infty$ での自由エネルギー，つまり送信電力の低減限界は

$$\begin{aligned} f &= -\lim_{\substack{K,\beta\to\infty \\ n\to 0}} \frac{1}{nK\beta}\ln \overline{Z}^n \\ &= (5+4m)G'(-4\chi) \\ &\quad +\hat{m}m+\frac{1}{2}\hat{q}\chi-\int Dz\left|\hat{m}+\sqrt{\hat{q}}z\right| \end{aligned}$$

$m, \chi, \hat{m}, \hat{q}$ が満たすべき鞍点方程式は

$$m = 2H\left(-\frac{\hat{m}}{\sqrt{\hat{q}}}\right)-1$$

$$\chi = \sqrt{\frac{2}{\pi\hat{q}}}\exp\left[-\frac{\hat{m}^2}{2\hat{q}}\right]$$

$$\hat{m} = -4G'(-4\chi)$$

$$\hat{q} = 8(5+4m)G''(-4\chi)$$

と求まる．ここで $\mathrm{G}'(x)$ は

$$\mathrm{G}'(x) = \frac{1-\alpha-\sqrt{(1-\alpha)^2-4\alpha x}}{2\alpha x}$$

である．

この自由エネルギーから送信電力低減限界の評価を行う．

図３が RS 仮定のもとで求めた自由エネルギーから，$\alpha = K/N$ ごとの送信電力の低減限界 E[dB] を求めたものである．点線は，$N=20$ のもとで最も送信電力を低減できる信号を全数探索することで求めた結果である．この結果から，RS 仮定による結果が以下のような誤りを含んでいることがわかる．

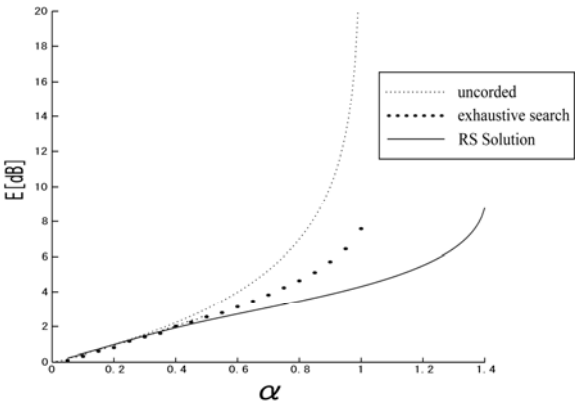

図 3 RS 仮定による送信電力低減限界

$HH^{\dagger}$ は $\alpha\geq 1$ で 0 固有値が現れるため，$\left(HH^{\dagger}\right)^{-1}$ において，発散する固有値が現れるようになる．そのため，$\alpha=1$ で送信電力の発散が見られるはずであるが，RS 仮定による結果は $\alpha=1$ で発散していない．一方，全数探索により求めた低減限界では $\alpha=1$ で電力が発散する傾向が見られたので，RS 仮定による結果[5]は定性的に誤った結果を与えていると考えられる．

以上のことから，先行研究である Mueller et al の結果は系の定性的な振舞いを説明するのにも不十分であることがわかる．レプリカ法の一連の計算は多くの仮定をに基づいているが，定性的に誤った結果が現れたときはレプリカ対称性に対する仮定が不適切な場合であり，対称性の破れた仮定を置くことで解の振舞いを改善することができることが経験的に知られている．また，レプリカ対称性に関する仮定は自由エネルギーの解空間の構造の仮定に関係しており，レプリカ法をたんなる平均操作以上の，系の特徴を抽出する方法としての側面を持たせている．

そこで次に，解構造という観点からより進んだレプリカ対称性に関する仮定を導入し，解析の改善を試みる．

4.2 1 RSB 仮定

ここでは one step replica symmetry breaking[6]と呼ばれる，レプリカ対称性を 1 段階破った仮定を用いて自由エネルギーの評価を行う．RS 仮定は熱力学的極限において，自由エネルギーの解構造が単峰的で唯一の安定解が存在するという仮定のもとに鞍点を求める方法であるが，別の仮定として，解構造が多峰的な図４のような構造をもっていると仮定して自由エネルギーを求めてみる．

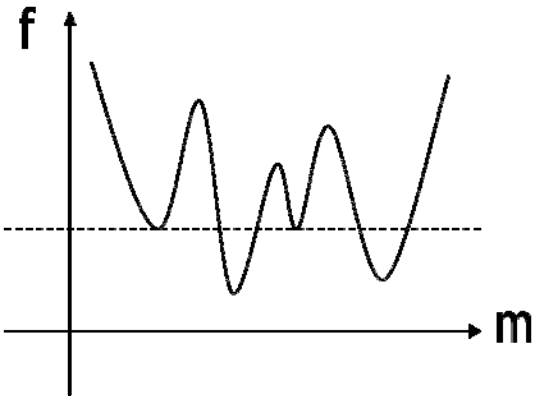

図 4 自由エネルギーの多谷構造

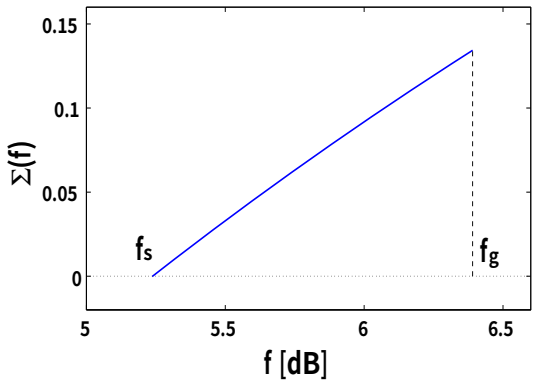

図 5　complexity curve (α =0.9)

ある自由エネルギー f をとる準安定解の個数を

$$N(f) \approx \exp\left[K\Sigma(\beta, f)\right] \qquad (4.3.1)$$

とあらわそう．$\Sigma(\beta, f)$ は complexity と呼ばれる量である．Complexity が正の値に評価された場合，多峰的な仮定に意味があったことがわかる．逆に 0 であれば，単峰的であるため，1RSB 仮定は RS 仮定を含んだ仮定になっている．そこで自由エネルギーの評価だけでなく complexity の評価も行う．

ここで，自由エネルギーの議論に沿って以下のようなモーメント母関数を考える．

$$\sum_{\alpha} \mathrm{Z}_{\alpha}^{x} = \int df\,(e^{-K\beta f})^{x} \times N(f)$$

$$\approx \max_{f}\left[\exp\left\{K\left[-\beta x f + \Sigma(\beta, f)\right]\right\}\right] \quad (4.3.2)$$

ただし，α はそれぞれの準安定解を表す添え字であり，Z_{α} はその解の分配関数である．(4.3.2)の対数をとり RS 仮定と同様にレプリカ法によりランダム性を有する相互作用に関して平均をとると

$$\varphi(\mu) = \lim_{n\to 0} \frac{1}{n\beta x K} \log\left(\overline{\sum_{\alpha} \mathrm{Z}_{\alpha}^{x}}\right)^{n} \qquad (4.3.3)$$

のように表せる．$\varphi(\mu)$ から Σ , f は $\mu = \beta x$ の関数として

$$\Sigma(f) = \mu^{2} \frac{\partial}{\partial \mu}\varphi(\mu),\ f = \frac{\partial}{\partial \mu}\mu\varphi(\mu) \quad (4.3.4)$$

と，表すことができる．

上の議論は 3 節で述べた自由エネルギー形式の議論にそえば，温度が β に固定された系で，f で指定される典型集合を x でパラメトライズし，ある x で指定される f の個数を式(4.3.1)で数えていることになる．

(4.3.4)より complexity を評価したのが図 5 である．図 5 を見ると complexity が正の値をとっている範囲が存在することがわかる．これは自由エネルギーにおける解空間の構造が RS 仮定で想定した単峰的な構造ではなく，1RSB 仮定で想定したような多峰的な解構造であることを表している．なお，図中の f_g , f_s は f_g ：(complexity が最大値をとるときの f)，f_s ：(complexity が有限値から 0 に変わるときの f) を表す．今評価したい送信電力の低減限界は f_s であり，これが 1RSB 仮定のもとでの自由エネルギーである．

式(4.3.3)から 1RSB 仮定のもと，RS 仮定のときと同様に計算をすすめると，自由エネルギーは

$$\varphi(\mu) = \left(1+4m+4q\right)G'\left(-4\chi - 4\mu\left(1-q\right)\right)$$

$$-\frac{1}{\mu}\left(G\left(-4\chi - 4\mu\left(1-q\right)\right) - G\left(-4\chi\right)\right)$$

$$+\hat{m}m + \frac{1}{2}(\hat{\chi}+\hat{q}) + \frac{\mu}{2}\hat{q}\left(1-q\right)$$

$$-\frac{1}{\mu}\int Dz \ln e^{\mu h}\left[H\left(-\frac{\mu\hat{\chi}+h}{\sqrt{\hat{\chi}}}\right)\right.$$

$$\left. + e^{-\mu h} H\left(-\frac{\mu\hat{\chi}-h}{\sqrt{\hat{\chi}}}\right)\right]$$

と，評価される．ここで

$$H(x) = \int_{x}^{\infty} Dz,\ h = \sqrt{\hat{q}}z + m$$

鞍点方程式は

$$\chi = \int DZ \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi\hat{\chi}}}\exp\left(-\frac{h^2}{2\hat{\chi}}-\frac{\hat{\chi}}{2}\mu^2\right)}{H_+\exp(\mu h)+H_-\exp(-\mu h)}$$

$$q = \int DZ\left[\frac{H_+\exp(\mu h)-H_-\exp(-\mu h)}{H_+\exp(\mu h)+H_-\exp(-\mu h)}\right]^2$$

$$m = \int DZ\left(\frac{H_+\exp(\mu h)-H_-\exp(-\mu h)}{H_+\exp(\mu h)+H_-\exp(-\mu h)}\right)$$

$$\hat{\chi} = \frac{8}{\mu}\left[G'(-4\chi)-G'(-4\chi-4\mu(1-q))\right]$$

$$\hat{q} = 8(1+4m+4q)G''(-4\chi-4\mu(1-q))$$

$$\hat{m} = -4G'(-4\chi-4\mu(1-q))$$

ここで

$$H_\pm = H\left(-\frac{h\pm\mu\hat{\chi}}{\sqrt{\hat{\chi}}}\right)$$

である．

図６は RS 仮定における性能評価で求めた図３に，1RSB 仮定により評価した送信電力低減限界の結果，つまりαごとの f_s の値を重ねたものである．RS 仮定での評価と違い，α＝1 での送信電力の発散や，全数探索により求めた限界値とのよい一致が見られる．このことから 1RSB 仮定による評価が定性的によりよい評価を与えていることがわかる．

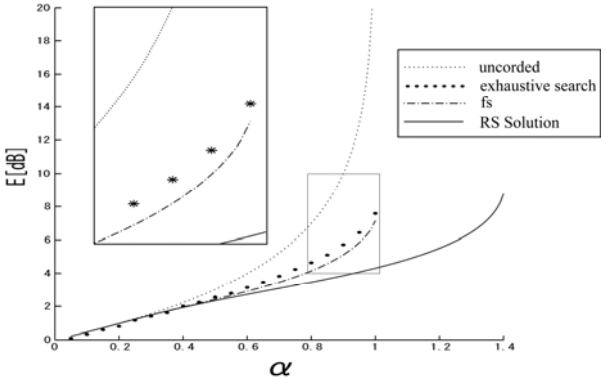

図６　1 RSB 仮定による送信電力低減限界

5. 平均場アルゴリズム

自由エネルギーによる評価では，送信電力の低減限界を評価したが，実際にはそれを実現する符号化アルゴリズムが必要である．実はこの問題に対しても，自由エネルギー形式が有効である．ただし，実際の系に対するアルゴリズムを考えるために，レプリカ法のように相互作用のサンプル平均をとった自由エネルギーではなく，個別のサンプルに対する自由エネルギーを考える必要がある．

ある特定のサンプルにおける分配関数が計算できた場合，指数型分布族の性質から，あるサイトのスピンの平均値は自由エネルギーをその平均値に共役な変数で微分することで得られる．または，後にするようにルジャンドル変換を用いることで，自由エネルギーを直接平均値の関数として表すことができ，自由エネルギーの極値問題として平均値を求めることもできる．$\beta\to\infty$ では，この平均値が求めたかった最小エネルギーを与えるとりうる解の平均値になるため，これを用いることで符号化アルゴリズムを求めることができる

問題はいかに分配関数を評価するかである．最も素朴に計算する場合，すべての状態に対してボルツマン因子の和をとることになるが，その数はシステムサイズの増加に対して指数的に増加することになる．そこで，近似を用いることで評価することを考える．

次の１パラメータ拡張された自由エネルギーを考える[8].

$$Z(l\mathbf{J},\theta) = \mathrm{Tr}\exp\left(-\frac{l\beta}{2}\mathbf{b}^{\mathbf{T}}(\mathbf{H}\mathbf{H}^{\dagger})^{-1}\mathbf{b}\right)$$

この分配関数から求められる自由エネルギーをルジャンドル変換すると

$$\Phi_l(\mathbf{m},\mathbf{M}) = \underset{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{extr}}[$$
$$-\log Tr\exp(-\frac{\beta}{2}\mathbf{b}^{\mathbf{T}}(l(\mathbf{H}\mathbf{H}^{\dagger})^{-1}+\boldsymbol{\lambda})\mathbf{b}+\beta\boldsymbol{\tau}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\gamma})$$
$$+\hat{\boldsymbol{\tau}}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\gamma}+\frac{K}{2}\boldsymbol{\lambda}]$$

ここで

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} \equiv \langle\boldsymbol{\tau}\rangle$$

となる．

左辺の量はギブス自由エネルギーと呼ばれるが，逆変換をほどこすことで元の（ヘルムホルツ）自由エネルギーを求めることができるので，両者の自由エネルギーは同等の情報を持っていると考えられる．この自由エネルギーを拡張パラメータで展開したのち，主要な項の和のみ考えれば元の自由エネルギーの近似となる．ここでは，適応 TAP 平均場近似[9]と呼ばれる方法でこの近似を行うことを考える．

まず簡単な変形から

$$\Phi_1 - \Phi_0 = \int_0^1 dl \frac{\partial \Phi_l}{\partial l}$$

となる．右辺を近似することが自由エネルギーの展開項に関する近似に相当するが，TAP 平均場近似では，$\boldsymbol{\tau}$ に対するイジング型の制約を

$$P(t_i) = \frac{1}{2}\delta(t_i - 1) + \frac{1}{2}\delta(t_i + 1)$$

と表せば，分配関数は

$$\mathrm{Tr}\exp\left(-\frac{\beta}{2}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}\mathbf{b}\right)$$
$$= \int\prod_i dt_i P(t_i)\exp\left(-\frac{\beta}{2}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}\mathbf{b}\right)$$

と表すことができるが，これを連続的な制約であるガウス型の

$$P(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

を用いることで近似する．つまり近似したかった高次項，つまり求めたギブス自由エネルギーからエントロピーの部分を引いた量が同じであるとして以下のように近似する．

$$\Phi_1 - \Phi_0 \approx \Phi_{Gauss\,1} - \Phi_{Gauss\,0}$$

この近似を用いるとギブス自由エネルギーは

$$\Phi_1 \approx \Phi_{Gauss\,1} - \Phi_{Gauss\,0} + \Phi_0$$

となるが，右辺はすべて解析的に求めることができるので，これを計算すると

$$\varphi_{TAP}(\hat{\boldsymbol{\tau}}) = (\mathbf{s} + 2\hat{\boldsymbol{\tau}})^t (\mathbf{H}\mathbf{H}^{\dagger})^{-1}(\mathbf{s} + 2\hat{\boldsymbol{\tau}})$$
$$+\sum_{i=1}\left[2h_i\hat{t}_i - \frac{1}{\beta}\log 2\cosh(\beta h_i)\right]$$
$$-\frac{K}{\beta}G(-4\beta(1-q))$$

となる．

これを微分することで

$$\frac{\partial}{\partial \hat{t}_i}\varphi_{TAP}(\hat{\boldsymbol{\tau}}) = 2(\mathbf{H}\mathbf{H}^{\dagger})^{-1}(\mathbf{s} + 2\hat{\boldsymbol{\tau}}) + \frac{1}{\beta}\tanh^{-1}(\hat{t}_i)$$
$$-8G'(-4\beta(1-q))\hat{t}_i$$
$$= 0$$

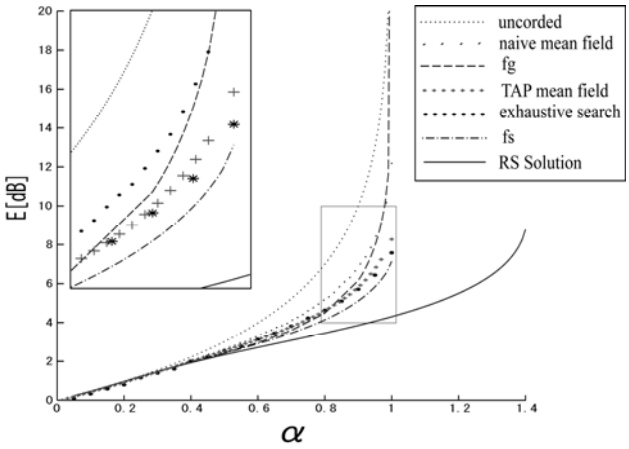

図 7　TAP 平均場アルゴリズム

が求まる．

$\beta \to \infty$ とすることで，求めたい TAP 平均場近似による平均値を求めることができる．

この連立方程式は解が満たすべき条件を表しているだけなので，この方程式を満たす解でエネルギーを最小にする解を求めるアルゴリズムが必要である．ここでは逐次的なエネルギー降下アルゴリズム[11]により解を求めた．求まった解は大部分が ± 1 になるが，一部 $|\hat{t}| < 1$ となる変数が現れてくる．しかし，全数探索に比べると非常に多数の変数について，アルゴリズムにより ± 1 を決定することができるので，少数の変数については全数探索を行えばよい．系が大きくなると，その分決まらない変数の数も増えてくるが，平均値の絶対値が小さいほうから２０変数までについては全数探索を行い，それ以外の変数には符号関数により決定するヒューリスティクスを用いる．

6. 実験結果

TAP 平均場近似，比較のためのナイーブ平均場近似，それぞれから求められたアルゴリズムによる解探索の結果が図 7 である．システムサイズは $N = 64$ で，上から順に，非線形プリコーディングなし，ナイーブ平均場アルゴリズムによる結果，f_g：(complexity が最大値をとるときの自由エネルギー)，TAP 平均場アルゴリズムによる結果，全数探索による結果，f_s：(complexity が有限値から 0 に変わるときの自由エネルギー＝1RSB 仮定のもとでの送信電力の低減限界)，RS 仮定のもとでの送信電力の低減限界となっている．この結果から TAP 平均場近似とヒューリスティクスの組合せによるアルゴリズ

ムが，レプリカ法により評価した低減限界にせまる性能を示しており，送信電力低減において有効なアルゴリズムであることがわかる．

また，図 7 を見ると局所探索（ナイーブ平均場近似）による解探索が f_g 付近でトラップされていることがわかる．このことから，ランダムフリップなど単純なアルゴリズムで最適解を得るのが難しいのは，1 RSB 仮定が有意な多数の解が存在するような問題では準安定解にトラップされてしまうからだと考えられる．このような現象は，充足可能性問題など他の最適化問題でも生じていることが知られている[10]．このことは最適化問題の複雑さの理解に対して，統計力学的な手法によるアプローチの有効性を示唆している．

7. まとめ

MIMO 通信において送信電力を低減させるための一手法である非線形プリコーディングを統計力学の手法を用いることで解析した．この問題は自由度の増加とともに計算複雑度が増していく組合せ最適化問題となるため，厳密な評価，最適化アルゴリズムを求めることが困難である．そこで，本稿では近似手法として，多体系から平均的な特徴を抽出することを目的とした統計力学による手法，特に構造が確率的な要素を含む系に有効なレプリカ法を用いて評価した．

レプリカ法は適切な仮定のもとで用いられる必要があるが，先行研究の RS 仮定では数値実験の結果と大きく食い違っていた．そこで，より詳細な 1RSB 仮定による評価を行ったところ，数値実験が示す振舞いを定性的に説明する結果が得られた．また，Thouless-Anderson-Palmer(TAP)平均場近似を用いたアルゴリズムを提案し，その有効性を実験的に示した．

TAP 平均場近似によるアルゴリズムでは，実際的なシステムサイズに対し，ヒューリスティクスと組み合わせることでレプリカ法により評価した限界をほぼ達成することができた．またレプリカ法から得た解構造の様子とアルゴリズムの性能を比べることで，レプリカ対称性と問題の複雑さが密接にかかわっていることを支持する結果が得られた．

参考文献

[1] E. Biglieri, R. Calderbank, A. Constantinides, A. Goldsmith, and A. Paulraj, *MIMO Wireless Communications*, Cambridge University Press, 2007.

[2] M. Tomlinson, “New automatic equaliser employing modulo arithmetic,” *Electronics Letters*, vol. 7, 1971, pp. 138-139.

[3] H. Harashima and H. Miyakawa, “Matched-Transmission Technique for Channels With Intersymbol Interference,” *Communications, IEEE Transactions on*, vol. 20, 1972, pp. 774-780.

[4] 西森秀稔，「スピングラス理論と情報統計力学」岩波書店，1999

[5] R. Muller, Dongning Guo, and A. Moustakas, “Vector Precoding for Wireless MIMO Systems and its Replica Analysis,” *Selected Areas in Communications, IEEE Journal on*, vol. 26, 2008, pp. 530-540.

[6] R. Monasson, “Structural Glass Transition and the Entropy of the Metastable States,” *Physical Review Letters*, vol. 75, Oct. 1995, p. 2847.

[7] K. Takeda, S. Uda and Y. Kabashima “Analysis of CDMA systems that are characterized by eigenvalue spectrum,” *Europhysics Letters*, vol. 76, 2006, p. 1193.

[8] T. Plefka, “Convergence condition of the TAP equation for the infinite-ranged Ising spin glass model,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 15, 1982, pp. 1971-1978.

[9] M. Opper and O. Winther, “Adaptive and self-averaging Thouless-Anderson-Palmer mean-field theory for probabilistic modeling,” *Physical Review E*, vol. 64, Oct. 2001, p. 056131.

[10] M. Mezard, G. Parisi, and R. Zecchina, “Analytic and Algorithmic Solution of Random Satisfiability Problems,” *Science*, vol. 297, Aug. 2002, pp. 812-815.

[11] Y. Tonosaki and Y. Kabashima, “Sequential Minimization of the Bethe Free Energy of Ising Spin Systems,” *Interdisciplinary Information Sciences*, Vol. 13, No. 1, 2007, pp. 57-64.