

確率伝搬法による確率的画像処理における統計的性能評価

Statistical Performance Analysis in Probabilistic Image Processing by Belief Propagation

片岡 駿* 安田 宗樹* 田中 和之*
Shun Kataoka Muneki Yasuda Kazuyuki Tanaka

Abstract: We propose new schemes for evaluating statistical performances of image restoration based on Bayesian statistics. The schemes are constructed by means of belief propagation, which is a powerful approximate methods in probabilistic inference. They are reduced to problems involving the solution of simultaneous integral equations for distributions of messages in belief propagation. Our schemes are proposed for two cases. One of them is for the case in which the original image is given explicitly. The other one is for the case in which the prior probability for the original image is given. We show some numerical results of the statistical performance analysis for the probabilistic restoration of binary images.

Keywords: Bayesian statistics, Markov random fields, belief propagation, probabilistic information processing, statistical mechanical informatics, Bayesian network

1 まえがき

確率的画像処理 (Probabilistic Image Processing) はベイズ統計 (Bayesian Statistics) にもとづいて確率モデル化が行われ、データの不確定性を確率モデルという形で系統的に取り扱うことのできる理論的枠組みとして知られている。従来、画像処理に対する確率モデルは大規模なものとなり、計算困難の問題がつきまとうことから、現実の応用という点では、それほど注目されてきたわけではなかった。最近、確率伝搬法 (Belief Propagation: BP) とよばれる近似計算技法が提案されることで、計算困難を回避することが比較的容易となり、急速にその応用への道が拓がりつつある [1, 2, 3].

このような中で、確率的画像処理の性能を統計的に評価する方法に対する要請が高まりつつある。統計的性能評価は確率的に定式化されたシステムの性能を多くのサンプルに対する数値実験を通して得られた結果に対する標本平均を通して評価するのではなく、解析的にその性能を計算してしまうものである。確率的画像処理に対する統計的性能評価は事前確率分布をガウシアングラフィ

カルモデルなどの可解モデルに仮定した場合に対してはいくつかの研究成果がすでに報告されている [4, 5]. しかし、一般の確率モデル、特に離散確率場に対してはまだ具体的な方法は提案されていない。

誤り訂正符号における低密度パリティ検査符号 (Low Density Parity Check: LDPC) 符号、移動体通信における符号分割多重接続 (Code Division Multiple Access: CDMA) 復調方式に対しての統計的性能評価法はレプリカ法 (Replica Method) とよばれる統計力学の方法をもとにして提案されている [6, 7, 8]. しかしレプリカ法が適用できるのは完全グラフ、疎結合ランダムグラフなどのある特殊な構造をもつグラフ上の確率モデルに限定される。確率的画像処理に対しては原画像の事前確率分布を完全グラフ上で定義した場合についてはレプリカ法による統計的性能評価についての研究が報告されている [6, 9, 10, 11]. しかし、実際の画像処理の応用において取り扱われるグラフは正方格子となる場合が多く、レプリカ法の適用範囲からは外れてしまう。

本研究では確率伝搬法をもちいた確率的画像処理に対する統計的性能評価法を提案する。第2節では本論文で取り扱う確率的画像処理の定式化をベイズ統計の枠組みにもとづいて与える。第3節では確率的画像処理における確率伝搬法の定式化とそれを拡張した統計的性能評価

*東北大学大学院情報科学研究科, 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-3-09, tel. 022-795-5885, e-mail {xkataoka,muneki,kazu}@smapi.is.tohoku.ac.jp, Graduate School of Information Sciences, Tohoku University, 6-3-09, Aramaki-Aza-Aoba, Aobaku, Sendai 980-8579

法の提案を行う。第4節では第3節で提案した評価法についてのいくつかの数値実験の結果を与える。第5節はまとめである。

2 確率的画像処理

本節では、確率的画像処理のベイズの公式にもとづく定式化を与え、定式化した確率モデルによる画像修復の統計的性能を測るための枠組みを与える。取り扱う原画像は白黒の2値画像に、ノイズは加法的白色ガウスノイズに限定して説明する。

2.1 画像のモデル化

原画像を白黒の2値画像とし、各画素は正方形格子に配列しているとする。各画素にラベル i を割り当てることとし、すべての画素の集合を $V = \{1, 2, \dots, |V|\}$ とあらわすこととする。また、すべての最近接画素対 $\{i, j\}$ の集合を E とあらわす。画素 i の階調値に対する確率変数を f_i とし、 i 番目の画素が白の状態をとるとき $f_i = +1$ 、黒の状態をとるとき $f_i = -1$ とあらわすことにする。原画像の確率場は $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f)$ により表現される。原画像に対する事前確率分布は次のように仮定する。

$$P(\vec{f} | J) = \frac{1}{Z_f} \exp \left\{ -\frac{J}{2} \sum_{\{i,j\} \in E} (f_i - f_j)^2 \right\} \quad (1)$$

ここで J は正值のみをとるハイパパラメータであり、 Z_f は規格化定数である。

劣化画像は原画像において各画素 i ごとに独立にガウスノイズが f_i に加えられることで生成されたものであるとし、劣化画像の各画素 i の階調値を g_i とあらわすことにする。すると原画像 \vec{f} が与えられたときの劣化画像 $\vec{g} = (g_1, g_2, \dots, g_{|V|})^T$ が生成される条件付き確率分布は

$$P(\vec{g} | \vec{f}, \sigma) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^{|V|} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i \in V} (g_i - f_i)^2 \right\} \quad (2)$$

とあらわされる。ここで σ^2 は加法的白色ガウスノイズの分散である。

式(1)および式(2)をベイズの公式に代入することで劣化画像 \vec{g} が与えられたときの原画像 \vec{f} に対する事後確率分布を導出することができる。このとき原画像と区別するために原画像の推定画像を $\vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_{|V|})$ であらわし、推定者にとって未知となるパラメータ J と σ^{-2} をそれぞれ α と β であらわし、劣化画像 \vec{g} から推定

画像 \vec{h} を推定するためにもちいる事後確率分布は

$$P(\vec{h} | \vec{g}, \alpha, \beta) = \frac{1}{Z_h} \exp \left(\alpha \sum_{\{i,j\} \in E} h_i h_j + \beta \sum_{i \in V} g_i h_i \right) \quad (3)$$

と導かれる。 Z_h は事後確率分布 $P(\vec{h} | \vec{g}, \alpha, \beta)$ の規格化定数である。

2.2 最大周辺事後確率推定

本論文では式(3)の条件付き確率分布からの推定には各画素 i ごとに周辺事後確率分布を最大化する階調値をその画素の推定値 h_i とする最大事後確率推定 (Maximum Posterior Marginal: MPM) 推定を採用する。画素 i の原画像の推定値 h_i に対する周辺事後確率分布は

$$P_i(h_i | \vec{g}, \alpha, \beta) = \sum_{\vec{h} \setminus h_i} P(\vec{h} | \vec{g}, \alpha, \beta) \quad (4)$$

である。本論文では2値画像を扱っているため、この周辺事後確率分布を最大化する階調値 h_i^* は h_i の期待値 $\langle h_i | \vec{g}, \alpha, \beta \rangle$ をもちいて

$$h_i^* = \arg \max_{h_i} P_i(h_i | \vec{g}, \alpha, \beta) = \text{sgn} \left(\langle h_i | \vec{g}, \alpha, \beta \rangle \right) \quad (5)$$

により与えられ、劣化画像 \vec{g} からの原画像の推定画像は h_i^* を成分とする \vec{h}^* で与えられる。

2.3 最大周辺事後確率推定の統計的評価

MPM 推定による画像の修復度をはかる尺度として、本論文では原画像 \vec{f} と推定画像 \vec{h}^* の間の規格化されたハミング距離を採用する。これは

$$D_h(\vec{f}, \vec{h}^*) \equiv \frac{1}{|V|} \sum_{i \in V} (1 - \delta_{f_i, h_i^*}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2|V|} \sum_{i \in V} f_i \text{sgn}(\langle h_i | \vec{g}, \alpha, \beta \rangle) \quad (6)$$

によりあらわされる。

MPM 推定における原画像と推定画像の間の修復度の統計的性能は以下のように $D_h(\vec{f}, \vec{h}^*)$ の統計平均により定義される。まず $D_h(\vec{f}, \vec{h}^*)$ を原画像 \vec{f} と劣化画像 \vec{g} に関して平均した量

$$[D_h]_{f,g} \equiv \sum_{\vec{f}} \int d\vec{g} D_h(\vec{f}, \vec{h}^*) P(\vec{g} | \vec{f}, \sigma) P(\vec{f} | J) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2|V|} \sum_{i \in V} \sum_{\vec{f}} \int d\vec{g} f_i \text{sgn}(\langle h_i | \vec{g}, \alpha, \beta \rangle) \times P(\vec{g} | \vec{f}, \sigma) P(\vec{f} | J) \quad (7)$$

は事前分布 (1) に従い生成されるような全ての画像に関する修復度の期待値をあらわしており、本論文であつかう確率的画像修復モデルの性能評価となる。式 (7) において原画像はその分布を除いて特定されていないことに注意。他方、 $D_h(\vec{f}, \vec{h}^*)$ を劣化画像 \vec{g} に関して平均した量

$$\begin{aligned} [D_h]_g & \equiv \int d\vec{g} D_h(\vec{f}, \vec{h}^*) P(\vec{g} | \vec{f}, \sigma) \\ & = \frac{1}{2} - \frac{1}{2|V|} \sum_{i \in V} \int d\vec{g} f_i \operatorname{sgn}(\langle h_i | \vec{g}, \alpha, \beta \rangle) P(\vec{g} | \vec{f}, \sigma) \end{aligned} \quad (8)$$

はある特定の (分布をもたない) 画像 \vec{f} に対する画像修復に関して期待される性能をあらわしている。

式 (8) の $[D_h]_g$ は式 (7) の $[D_h]_{fg}$ において画像の事前分布 $P(\vec{f} | J)$ をある特定の画像 \vec{f} に関するデルタ関数とすることにより得られることに注意。

3 確率伝搬法と統計的性能評価

本節では、式 (7) および式 (8) により定義された原画像と推定画像の間の修復度の統計的評価を近似的に計算する方法を確率伝搬法をもとに与える。ここで述べる方法は、統計力学において確率伝搬法に対応する方法をスピングラスモデルに適用した研究 [12] を確率的画像処理に拡張することで与えられる。¹

3.1 確率伝搬法

確率伝搬法とは与えられた確率分布の周辺確率分布を計算する近似アルゴリズムである。式 (3) の確率分布に対する周辺確率分布 (4) の確率伝搬法における近似表式はメッセージとよばれる量 $\{\lambda_{ij}, \lambda_{ji} | \{i, j\} \in E\}$ をもちいて次のようにあらわされる。

$$P_i(h_i | \vec{g}, \alpha, \beta) \simeq \frac{1}{Z_i} \exp \left\{ \left(\beta g_i + \sum_{j \in \partial i} \lambda_{ij} \right) h_i \right\} \quad (9)$$

ここで Z_i は規格化定数であり、 $\partial i = \{j | \{i, j\} \in E\}$ は画素 i のすべての隣接画素からなる集合である。メッセージ $\{\lambda_{ij}, \lambda_{ji} | \{i, j\} \in E\}$ は以下の固定点方程式の解として与えられる。

$$\lambda_{ij} = \tanh^{-1} \left\{ \tanh(\alpha) \tanh \left(\beta g_j + \sum_{k \in \partial j \setminus \{i\}} \lambda_{jk} \right) \right\} \quad (10)$$

¹ 確率伝搬法は統計力学においてベータ近似 (Bethe Approximation) とよばれているものと等価である。

式 (6) の確率伝搬法による近似表式は式 (9) により

$$\begin{aligned} D_h(\vec{f}, \vec{h}^*) & \simeq \frac{1}{2} - \frac{1}{2|V|} \sum_{i \in V} f_i \operatorname{sgn} \left(\beta g_i + \sum_{j \in \partial i} \lambda_{ij} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

とあらわされる。すなわち固定点方程式 (10) の解を式 (11) に代入することにより、原画像 \vec{f} と観測された劣化画像 \vec{g} から確率伝搬法により得られた推定画像 \vec{h}^* の間のハミング距離が計算されることとなる。

3.2 メッセージの分布関数による最大周辺事後確率推定の統計的評価

ここでは式 (7) および式 (8) により定義された原画像と推定画像の間のハミング距離の統計的評価の確率伝搬法による近似表式を与える。原画像やノイズによりこの確率モデルはランダムネスをもつ。したがってそれらのランダムネスによる分布を考慮した確率伝搬法を考えるのが自然である。そのためには確率伝搬法におけるメッセージ λ_{ij} の分布関数 $P_{ij}^1(\lambda_{ij})$ というものが導入され、その分布関数をもちいて上記のハミング距離の統計的評価があらわされる形となる。

まず原画像が未知の場合、原画像が未知であるがそれを生成した事前確率分布 (1) のハイパパラメータ J と原画像が与えられた時の劣化画像を生成する事後確率分布 (2) のハイパパラメータ σ 、未知パラメータ α, β を既知とすると確率伝搬法におけるメッセージ λ_{ij} の分布関数 $P_{ij}^1(\lambda_{ij})$ は式 (10) より次の積分方程式の解として与えられる。

$$\begin{aligned} P_{ij}^1(\lambda_{ij}) & = \int dg_j P_j(g_j) \prod_{k \in \partial j \setminus \{i\}} d\lambda_{jk} P_{jk}^1(\lambda_{jk}) \\ & \times \delta \left[\lambda_{ij} - \tanh^{-1} \left\{ \tanh(\alpha) \tanh \left(\beta g_j + \sum_{k \in \partial j \setminus \{i\}} \lambda_{jk} \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

ここで $\delta[\dots]$ は Dirac のデルタ関数であり、 $P_i(g_i)$ は次の式で定義される。

$$P_i(g_i) \equiv \int \prod_{j \in V \setminus \{i\}} dg_j \sum_{\vec{f}} P(\vec{g} | \vec{f}, \sigma) P(\vec{f} | J) \quad (13)$$

ただし $P_i(g_i)$ を厳密に求めることはやはり難しいので、 $P_i(g_i)$ も確率伝搬法をもちいて計算する必要があるが、ここではメッセージの分布を考慮する必要がないので通常の確率伝搬法の範囲内で計算可能である。

積分方程式 (12) の解として得られるメッセージに対する分布関数をもちいて式 (7) の $[D_h]_{f,g}$ は近似的に次

のようにあらわされる.

$$[D_h]_{f,g} \simeq \frac{1}{2} - \frac{1}{2|V|} \sum_{i \in V} \sum_{f_i} \int dg_i P_i(g_i) \prod_{j \in \partial i} d\lambda_{ij} \\ \times P_{ij}^1(\lambda_{ij}) f_i \operatorname{sgn} \left(\beta g_i + \sum_{j \in \partial i} \lambda_{ij} \right) \quad (14)$$

原画像 f が特定されている場合のメッセージの分布関数 $P_{ij}^2(\lambda_{ij})$ は次の積分方程式の解として与えられる.

$$P_{ij}^2(\lambda_{ij}) = \int dg_j \prod_{k \in \partial j \setminus \{i\}} d\lambda_{jk} P_{jk}^2(\lambda_{jk}) \\ \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(g_j - f_j)^2}{2\sigma^2} \right\} \\ \times \delta \left[\lambda_{ij} - \tanh^{-1} \left\{ \tanh(\alpha) \tanh \left(\beta g_j + \sum_{k \in \partial j \setminus \{i\}} \lambda_{jk} \right) \right\} \right] \quad (15)$$

この積分方程式の解として得られるメッセージに対する分布関数をもちいて式 (8) の $[D_h]_g$ は次のようにあらわされる.

$$[D_h]_g \simeq \frac{1}{2} - \frac{1}{2|V|} \sum_{i \in V} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int dg_i \prod_{j \in \partial i} d\lambda_{ij} P_{ij}^2(\lambda_{ij}) \\ \times f_i \operatorname{sgn} \left(\beta g_i + \sum_{j \in \partial i} \lambda_{ij} \right) \exp \left\{ \frac{(g_i - f_i)^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (16)$$

4 数値実験

本節では第 3 節で与えられた確率伝搬法をもちいた D_h の統計的性能評価の近似式 (14), (16) に α, β の値を具体的に与えて数値実験を行う. ここで劣化画像を生成する条件付確率分布 (2) のハイパラメータ σ の値を 1 とした. なお式 (12), (15) の積分方程式はモンテカルロ積分を用いて評価した.

4.1 原画像が未知の場合

原画像が特定されていないが, 原画像の事前確率分布 (1) の J の値が与えられ, その事前確率分布に従って生成されるすべての原画像に対する統計的性能 $[D_h]_{f,g}$ についての数値実験を与える. 統計的性能 $[D_h]_{f,g}$ は前節の積分方程式 (12) を数値的に解き, 得られたメッセージの分布関数 $P_{ij}^1(\lambda_{ij})$ を式 (14) に代入することで計算される. さまざまな α, β の値に対して得られる $[D_h]_{f,g}$ の値を図 1 に与える. ここで原画像に対する事前確率分布 (1) のハイパラメータ J の値を 0.465 としている. また図 2 は図 1 における $\beta = 1$ の $[D_h]_{f,g}$ のふるまいを抜き出したものである. 図 1, 図 2 において $[D_h]_{f,g}$ は

$(\alpha, \beta) = (0.465, 1)$ において最小値 0.0466 をとっている. これは $\alpha = J, \beta = \sigma^{-2}$ で最小値となることを意味しており, 文献 [6, 9] における 2 値画像の確率的画像処理において不等式により与えられている最適修復条件と一致する.

図 1 の結果は画像の事前確率分布のハイパラメータ $\{J, \sigma\}$ と一致するモデルのパラメータ $\{\alpha, \beta\}$ をもちいたときが最適であることを示しており, これは一見自明な結果のように考えられる. しかしながらここでの統計評価は確率伝搬法による“近似的”評価であるため一般にはこの最適性は自明ではない (最適点のシフトが起こる可能性がある). したがってここでの結果は上記の最適性に関して本論文で扱う画像処理モデルに対して確率伝搬法が統計的に良好な結果を与えることがわかる.

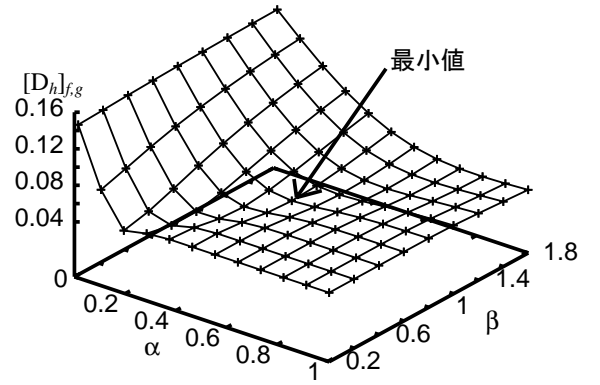


図 1: $J = 0.465$ の事前確率分布 (1) に対して分散 $\sigma^2 = 1$ の加法的白色ガウスノイズのもとでの統計的性能 $[D_h]_{f,g}$ の (α, β) 依存性.

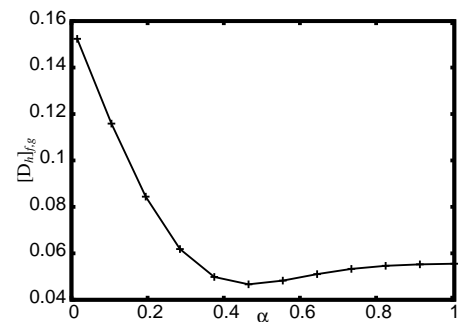


図 2: $J = 0.465$ の事前確率分布 (1) に対して分散 $\sigma^2 = 1$ の加法的白色ガウスノイズのもとで $\beta = 1$ と固定した場合の統計的性能 $[D_h]_{f,g}$ の α -依存性.

4.2 原画像が既知の場合

原画像を図3(画像サイズ 128×128) として1つ具体的に固定した場合の, 加法的白色ガウスノイズに対する統計的性能 $[D_h]_g$ についての数値実験を与える. 統計的性能 $[D_h]_g$ は前節の積分方程式 (15) を数値的に解き, 得られたメッセージの分布関数 $P_{ij}^2(\lambda_{ij})$ を式 (16) に代入することで計算される. さまざまの α, β の値に対して得られる $[D_h]_g$ の値を図4に与える. 図4から $\beta = 1$ の部分を抜き出したものを図5に与える. $[D_h]_g$ は $\alpha = 0.56$ 付近で最小値をとり $\alpha = 0.56$ での $[D_h]_g$ の値は0.0311である. この結果から図3の画像を修復する際の最適パラメータは $(\alpha, \beta) = (0.56, 1)$ 付近であることがわかる.

第2節で述べたように $[D_h]_g$ は $[D_h]_{f,g}$ において原画像 \vec{f} をある画像に固定することにより得られる. 実際の画像処理の性能評価を行う場合には原画像 \vec{f} は具体的に与えた上で行われるので, $[D_h]_{f,g}$ よりむしろ $[D_h]_g$ の方が実際には重要となる場合が多いと考えられる. 図4はハミング距離の意味で統計的に最適な点が存在することを示しており, これは確率的画像処理においてパラメータ推定の重要性を主張するための動機となる. 本提案手法は各画像について最適点が存在するか否かの判定ツールとしての発展が期待される.



図3: 第4.2節の数値実験でもちいる原画像

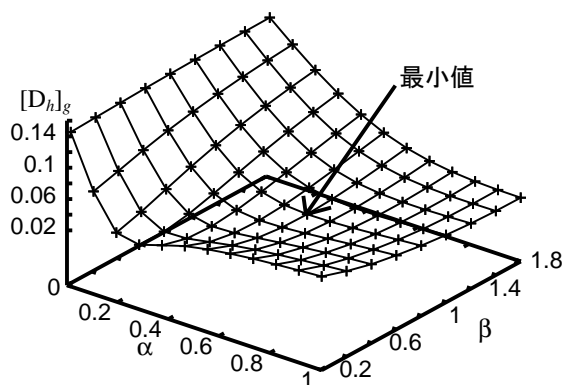


図4: 図3に対して分散 $\sigma^2 = 1$ の加法的白色ガウスノイズのもとでの統計的性能 $[D_h]_g$ の (α, β) 依存性.

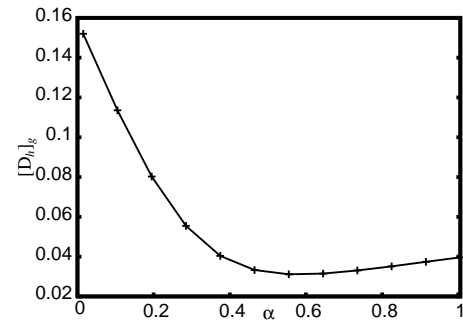


図5: 図3に対して分散 $\sigma^2 = 1$ の加法的白色ガウスノイズのもとでの統計的性能 $[D_h]_g$ の $\beta = 1$ の場合の α 依存性.

5 まとめ

本論文では原画像が既知である場合と未知である場合に対して確率伝搬法のメッセージの分布関数を考えることで確率的画像処理における統計的性能評価を行った. その結果, ループのないグラフ構造で定式化された確率伝搬法による統計評価法をループのある正方格子に適用した近似的統計評価法においても確率的画像処理の統計的性能評価が可能であることを示した. 今回は簡単のために2階調の場合を考えたが, 本論文の評価法は階調値が多値の場合にも拡張が可能であり, これは今後の課題である. また期待値最大化 (Expectation Maximization: EM) アルゴリズムによるハイパラメータ推定法に対する統計的評価 [5, 10, 11] への本論文の提案法の拡張も今後に残された課題である.

謝辞

本研究の一部は文部科学省科学研究費補助金 (No.21700247, No.18079002) およびグローバル COE プログラム “Center of Education and Research for Information Electronics Systems” の補助を得て行われたものである.

参考文献

- [1] A. S. Willsky: “Multiresolution Markov models for signal and image processing”, Proceedings of the IEEE, vol.90, no.8, pp.1396-1458 (2002).
- [2] K. Tanaka, “Statistical-mechanical approach to image processing”, Journal of Physics A: Mathematical and General, vol.35, no.37, pp.R81-R150 (2002).

- [3] 田中和之, 確率モデルによる画像処理技術入門, 森北出版 (2006)
- [4] K. Tanaka and J. Inoue, “Maximum likelihood hyperparameter estimation for solvable Markov random field model in image restoration”, *IEICE Transactions on Information and Systems*, vol.E85-D, no.3, pp.546-557 (2002).
- [5] K. Tanaka and D. M. Titterington, “Statistical trajectory of approximate EM algorithm for probabilistic image processing”, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol.40, no.37, pp.11285-11300 (2007).
- [6] H. Nishimori, *Statistical Physics of Spin Glass and Information Processing*, Oxford University Press (2001).
- [7] Y. Kabashima and D. Saad, “Statistical mechanics of low density parity check codes”, *Journal of Physics: Mathematical and General*, vol.37, no.6, pp.R1-R43 (2004).
- [8] T. Tanaka, “A statistical-mechanics approach to large-system analysis of CDMA multiuser detectors” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol.48, no.11, pp.2888-2910 (2002).
- [9] H. Nishimori and K. Y. M. Wong, “Statistical mechanics of image restoration and error-correcting codes”, *Physical Review E*, vol.60, no.1, pp.132-144 (1999).
- [10] J. Inoue and K. Tanaka, “Dynamics of the maximum marginal likelihood hyperparameter estimation in image restoration: Gradient descent versus expectation and maximization algorithm”, *Physical Review E*, vol.65, no.1, Article No.016125 (2002).
- [11] J. Inoue and K. Tanaka, “Mean field theory of EM algorithm for Bayesian gray scale image restoration”, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol.36, no.43, pp.10997-11010 (2003).
- [12] T. Morita, “Spin-glass and ferromagnetic phases of the random-bond Ising model on the Bethe lattice”, *Physica A*, vol.125, no.2/3, pp.321-343 (1984).