P047 混合Bernoulli分布に基づく変分Bayes法による連想記憶モデルの解析

荒木佑季，永田賢二，岡田真人，井上真郷
早稲田大学　東京大学　東京大学　早稲田大学

ボルツマン分布

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z}\exp\left(-\frac{1}{T}H(\mathbf{x})\right)$$

MCMC法
+1→0 -1→1 に変換

- Hebb則

$$J_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{p}\xi_i^\mu \xi_j^\mu \quad (\xi \in \{+1,-1\}^N)$$

- ハミルトニアン

$$H(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\sum_i x_i \sum_j J_{ij} x_j$$

高次元データ

$$\mathrm{x}^0 = (x_0^0, x_1^0, \cdots, x_N^0)$$
$$\mathrm{x}^1 = (x_0^1, x_1^1, \cdots, x_N^1)$$
$$\vdots$$
$$\mathrm{x}^M = (x_0^M, x_1^M, \cdots, x_N^M)$$

混合ベルヌーイ分布による変分Bayes法

クラスタリングにより系のクラスタ数を推定
- ・Bayes予測分布を近似的に求める
- ・事後確率最大化(MAP)推定を行うことでモデル選択

＊クラスタ数は次元数(ニューロンの数)N，記憶パターン数p，温度パラメータTの条件で変化

・確率モデル

$$p(x,z\,|\,a,b,K) = \prod_{m=1}^{M}\prod_{k=1}^{K}\left(a_k \prod_{n=1}^{N} b_{k,n}{}^{x_{m,n}}(1-b_{k,n})^{1-x_{m,n}}\right)^{z_{m,k}}$$

・混合割合の共役事前分布：Dirichlet分布

$$p(a\,|\,K) = \delta\left(\sum_{k=1}^{K} a_k - 1\right)\frac{\Gamma\left(\sum_{k=1}^{K}\tilde{\phi}_k\right)}{\prod_{k=1}^{K}\Gamma\left(\tilde{\phi}_k\right)}\prod_{k=1}^{K} a_k{}^{\tilde{\phi}_k - 1}$$

・Bernoulli分布の共役事前分布：ベータ分布

$$p(b\,|\,K) = \prod_{k=1}^{K}\prod_{n=1}^{N}\frac{\Gamma\left(\tilde{\beta}_{0,k,n}+\tilde{\beta}_{1,k,n}\right)}{\Gamma\left(\tilde{\beta}_{0,k,n}\right)\Gamma\left(\tilde{\beta}_{1,k,n}\right)} b_{k,n}{}^{\tilde{\beta}_{0,k,n}-1}(1-b_{k,n})^{\tilde{\beta}_{1,k,n}-1}$$

VBアルゴリズム

＜VB-Eステップ＞
・潜在変数更新

$$z_{m,k} : m = 1,\cdots,M, k = 1,\cdots K$$

＜VB-Mステップ＞
・パラメータ更新

$$\phi_k : k = 1,\cdots K$$
$$\beta_{0,k,n}, \beta_{1,k,n} : k = 1,\cdots K, n = 1,\cdots,N$$