

Radon 変換を介した医用画像再構成における画像修復

Image restoration for the Medical Images using Radon Transform

庄野 逸*
Hayaru Shouno

岡田 真人†
Masato Okada

Abstract: We propose an image reconstruction algorithm using Bayes inference for the Radon transformed observation data, which is usually used in medical imaging such like CT/PET. Through our Bayesian reconstruction method, we introduced several hyper-parameters for the prior and the observation process. The quality of the reconstructed image is influenced of the estimation accuracy of those hyper-parameters. Hence, we also propose the inference method of those hyper-parameters using marginal likelihood maximization principle. We show a better reconstruction result rather than that of a conventional method.

Keywords: Radon Transform, Bayes Inference, Image Reconstruction, Hyper-parameter Inference

1 まえがき

医療などで用いられる断層画像は、複数方向からの投影を行ない、得られたデータから元の空間での信号強度を推定することによって得られる物体断面画像である。このような物体のある断面における物理量の分布を画像化して表示する方法を画像再構成問題 (Image Reconstruction from Projection) と呼ぶ。この画像再構成問題を計算機を通して解く場合、これは Computed Tomography (CT) と呼ばれ、現在では物体の内部断面を画像として得るために良く用いられる。CT 画像の例としては X 線透過信号を用いた X 線 CT 画像や、体内に注入された放射性同位体を放射線源としてその濃度分布を推定する PET (Positron Emission Tomography) 画像などが挙げられる。これらの画像再構成の問題は基本的に Radon 変換と呼ばれる投影変換を元に構成されている。本研究では、Radon 変換を観測系としてもつよう

な画像再構成問題に対して Bayes 推定を用いた確率的画像修復の考え方を適用することで得られる結果に関して言及する。

2 定式化

2.1 Radon 変換

一般に Radon 変換は対象物の外部から投射される X 線や、体内に注入された放射性同位体から発生する放射線等による物体を透過する信号を様々な方向から観測するような状況を想定する。Radon 変換はこのような透過してくる観測信号の強度をモデル化したものと捉えることができる。Radon 変換の概要を図 1 に示す。図 1 において観測対象の置かれた座標系を (x, y) で表すものとし、観測系の座標を (s, t) 座標で表すものとする。観測器は s 軸上にセンサアレイとして据えつけられており、観測対象を透過して落ちてくる信号を拾うことで観測投影データを構成する。このセンサアレイを観測対象の周りで 1 周回し観測を行うことで様々な方向からの投影データが得られることになる。図 1 のような状況では、センサアレイを角度 θ だけ傾けて観測しているので、 (s, t) 座標系と (x, y) 座標系の間には回転変換が成立している:

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

* 電気通信大学 電気通信学部 情報通信工学科, 〒182-8585 調布市調布ヶ丘 1-5-1, tel. 042-443-5787, e-mail shouno@ice.uec.ac.jp, Dept. of Information and Communication Engineering, University of Electro-Communications, Chofu-ga-oka 1-5-1, Chofu, 182-8585, Japan.

† 東京大学 大学院新領域創成科学研究科 複雑理工学専攻, 〒277-8561 柏市 柏の葉 5-1-5, e-mail okada@k.u-tokyo.ac.jp, Graduate School of Frontier Science, The University of Tokyo, Kashiwa-no-ha 5-1-5, Kashiwa, 277-8561, Japan.

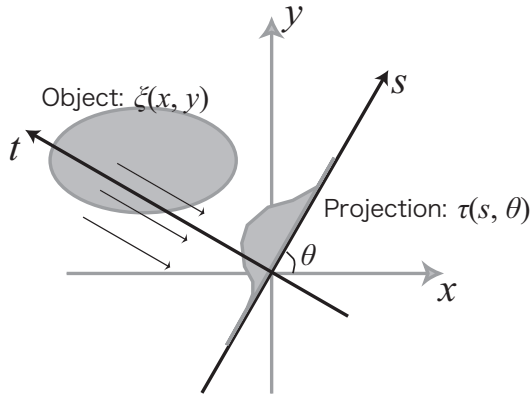


図1 Radon 変換の概略: 投影データは s 軸上で観測される。 θ はセンサアレイの傾きを表す。

ここで、観測対象の分布を $\xi(x, y)$ として定義する。この分布は X 線 CT 画像の場合は位置 (x, y) における X 線の吸収係数を意味し、PET 画像を再構成する場合は Positron の密度を表すことになる。観測データは、 s 軸上で定義されるので、これを $\tau(s, \theta)$ で表すものとする:

$$\tau(s, \theta) = \int dt \xi(x, y) = \int dt \xi(x(s, t), y(s, t)) \quad (1)$$

と書けることになる。この積分変換のことを Radon 変換と呼ぶ。

2.2 従来手法

観測データ $\tau(s, \theta)$ から原画像を再構成する従来手法を説明する。従来手法として良く用いられる手法として挙げられるものは Fourier 変換法および FBP (Filtered Back Projection) 法と呼ばれる手法である。これらの手法はいずれも本質的には周波数空間における議論を元に理論が構築されている。本節では、FBP 法についての説明を行う。ここで、画像を周波数空間で扱うために、以下のような修復画像 $\sigma(x, y)$ の Fourier 変換対を考える:

$$\tilde{\sigma}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \iint dxdy \sigma(x, y) e^{-2\pi j(x\tilde{x} + y\tilde{y})} \quad (2)$$

$$\sigma(x, y) = \iint d\tilde{x}d\tilde{y} \tilde{\sigma}(\tilde{x}, \tilde{y}) e^{2\pi j(x\tilde{x} + y\tilde{y})} \quad (3)$$

一方、Radon 変換 $\tau(s, \theta)$ の s に関する Fourier 変換は、 (x, y) 座標系から (s, t) 座標系への変数変換を行うことによって以下のように導ける:

$$\tilde{\tau}(\tilde{s}, \theta) = \int ds \tau(s, \theta) e^{-2\pi j s \tilde{s}} \quad (4)$$

$$= \tilde{\xi}(\tilde{s} \cos \theta, \tilde{s} \sin \theta). \quad (5)$$

$\tilde{\xi}(\tilde{s} \cos \theta, \tilde{s} \sin \theta)$ は、原画像の周波数空間における信号を極座標系で表したものと考えられる。このことから、様々

な角度 θ からの投影像に関するセンサの信号 $\{\tau(s, \theta)\}$ を観測し、周波数空間の任意の点の信号成分を得ることができれば、Fourier 変換像 $\tilde{\xi}(\tilde{x}, \tilde{y})$ が得られる。これを投影定理と呼ぶ。

FBP 法は、投影定理を元に Fourier 逆変換 (式 (3)) を \tilde{x}, \tilde{y} 座標系から極座標系 \tilde{s}, θ 上での積分として変数変換を行うことによって導出する:

$$\sigma(x, y) = \iint d\tilde{x}d\tilde{y} \tilde{\sigma}(\tilde{x}, \tilde{y}) e^{2\pi j(x\tilde{x} + y\tilde{y})} \quad (6)$$

$$= \int_0^\pi d\theta \int_{-\infty}^\infty d\tilde{s} |\tilde{s}| \tilde{\sigma}(\tilde{s} \cos \theta, \tilde{s} \sin \theta) e^{2\pi j s \tilde{s}} \quad (7)$$

また式 (7) 中の s に関する逆 Fourier 変換の部分を以下のように定義しておく:

$$g(s, \theta) = \int d\tilde{s} |\tilde{s}| \tilde{\sigma}(\tilde{s} \cos \theta, \tilde{s} \sin \theta) e^{2\pi j s \tilde{s}} \quad (8)$$

ここで

$$g(s, \theta) = \int d\tilde{s} |\tilde{s}| \tilde{\tau}(\tilde{s}, \theta) e^{2\pi j s \tilde{s}} \quad (9)$$

は、観測器が傾き θ のときの観測データ $\tau(s, \theta)$ に対して $|\tilde{s}|$ という微分型のフィルタをかけた像を Fourier 表現していることに他ならない。したがって $|\tilde{s}|$ を逆 Fourier 変換した像を核関数とした畳み込み演算を行うことで、フィルタをかけた像 (Filtered Image) $g(s, \theta)$ が求められる:

$$g(s, \theta) = \int du h(u) \tau(s + u), \quad (10)$$

ただし、 $h(u)$ はフィルタ関数 $|\tilde{s}|$ の逆 Fourier 変換を表すものとする。画像を再構成するには、フィルタをかけた像 $g(s, \theta)$ に対して $s = x \cos \theta + y \sin \theta$ の関係から

$$\sigma(x, y) = \int_0^\pi d\theta g(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) \quad (11)$$

という積分を実行することで $\sigma(x, y)$ を求めることが出来る。このように、投影データに対してフィルタリング処理を行って得た $g(s, \theta)$ から再構成を行う手法を FBP (Filtered Back Projection) 法と呼ぶ。現在の CT 画像の再構成においても、このフィルタの畳み込み関数 $h(u)$ をどのように設計するかということが重要な技術であるといえる。Ramachandran-Lakshminarayanan らは $|\tilde{s}|$ を逆フーリエ変換したフィルタを提案し、Logan-Shepp らは、さらに改良を加え高周波領域の抑えたようなフィルタを提案している [1][2]。図 2 にこれらのフィルタの概形を示す。

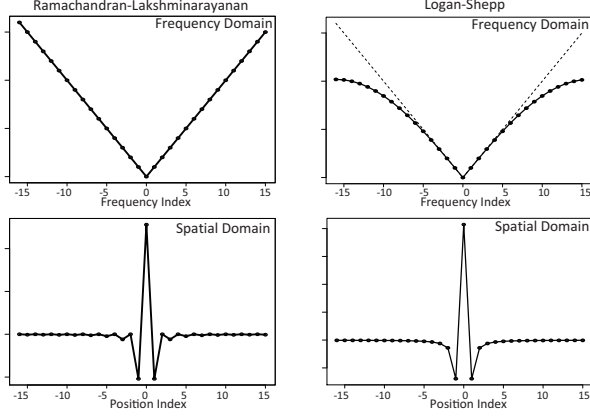


図2 古典的再構成フィルタ: 左列は Ramachandra らのフィルタ, 右列は Logan Shepp らのフィルタ. 上段は周波数空間での表現で, 下段は実空間での表現 [1][2].

2.3 確率モデル

ここで, 投影定理を元にしたモデルに対し, 観測ノイズを仮定した確率モデルを定式化する. 医療画像の一般のモデルとして扱う場合, 放射性崩壊などのイベントは Poisson ノイズとして扱うが, 本研究では可解モデルとして取り扱うことを主眼に置き, ガウスノイズを考えるものとしている. ここでは Radon 変換を行なう軸線上における原信号 $\xi(x, y)$ に加えてガウスノイズが重畳されるものとして取り扱う.

画像上の各点においてはガウスノイズ $n_p(x, y)$ を考慮するので, 観測値は $\tau(s, \theta)$ は Radon 変換を介することによって,

$$\tau(s, \theta) = \int dt (\sigma(x, y) + n_p(x, y)) \quad (12)$$

$$= \int dt \sigma(x, y) + N_p(s, \theta) \quad (13)$$

と書ける. このとき $N_p(s, \theta)$ はガウス変数の積分 $N_p(s, \theta) = \int dt n_p(x, y)$ となるので, やはりガウス変数として取り扱う. 以上の議論と従来の画像修復のアナロジーから連続系の観測過程のエネルギー関数 $H_n(\tau | \sigma)$ を以下のように定義する [3][5]:

$$H_n(\tau | \sigma) = 4\pi^2 \gamma \int_0^\pi d\theta \int ds \left(\tau(s, \theta) - \int dt \sigma(x, y) \right)^2. \quad (14)$$

ハイパーパラメータ γ はガウスノイズ $N_p(s, \theta)$ のばらつきに逆比例する量を表わし, 値が大きいほどガウスノイズの影響が小さいことを意味する. これは画像修復において観測をガウスノイズチャンネルを通して行ったもの

とみなすことができる [3]. このとき, 観測過程の確率を

$$p(\tau | \sigma) \propto \exp(-H_n(\tau | \sigma)) \quad (15)$$

と表す. さらに周波数空間での極座標表現を導入すると, Planchrel の定理より

$$p(\tau | \sigma) \propto \exp \left(-4\pi^2 \gamma \int d\theta \int d\tilde{s} |\tilde{\tau}_{\tilde{s}, \theta} - \tilde{\sigma}_{\tilde{s}, \theta}|^2 \right) \quad (16)$$

と書ける. ただし $\tilde{\tau}_{\tilde{s}, \theta} = \tilde{\tau}(\tilde{s}, \theta)$, $\tilde{\sigma}_{\tilde{s}, \theta} = \tilde{\sigma}(\tilde{s} \cos \theta, \tilde{s} \sin \theta)$ である. 以下では簡潔に表すために, この記法を用いることとする.

次に Bayes 推定を行うために本研究においても画像修復を行うための事前分布を導入する. 事前分布のエネルギー関数 $H_{\text{pri}}(\sigma)$ は観測過程の部分と同様に連続系の積分

$$H_{\text{pri}}(\sigma) = \beta \iint dx dy \|\nabla \sigma(x, y)\|^2 + 4\pi^2 h \iint dx dy \sigma(x, y)^2 \quad (17)$$

のように考えるものとする. 式 (17) において, 第 1 項が近隣の画素信号の類似度に関する拘束条件であり MRF に対応する. 第 2 項目が画像全体の期待値の周りにどのくらいの頻度で画素信号が存在するかという拘束条件で, 画素値全体の分布がガウス分布に従うようにするための拘束条件となる. 式 (17) の積分に対して, 極座標表現を導入したときの事前分布は

$$p(\sigma) \propto \exp(-H_{\text{pri}}(\sigma)) \quad (18)$$

$$= \exp \left(-4\pi^2 \int d\theta \int d\tilde{s} (\beta \tilde{s}^2 + h) |\tilde{s}| |\tilde{\sigma}_{\tilde{s}, \theta}|^2 \right) \quad (19)$$

と書ける.

以上の議論とベイズの定理

$$p(\sigma | \tau) = \frac{p(\tau | \sigma)p(\sigma)}{\sum_{\sigma} p(\tau | \sigma)p(\sigma)} \quad (20)$$

より事後分布を導くこととする. 式 (19) および (16) を用いて式 (20) の分子の項を計算すると,

$$p(\sigma | \tau) \propto \exp \left(-4\pi^2 \int_0^\pi d\theta \int d\tilde{s} \tilde{F}_{\tilde{s}} \left| \tilde{\sigma}_{\tilde{s}, \theta} - \frac{\gamma}{\tilde{F}_{\tilde{s}}} \tilde{\tau}_{\tilde{s}, \theta} \right|^2 \right) \times \exp \left(-4\pi^2 \int_0^\pi d\theta \int d\tilde{s} \gamma \left(1 - \frac{\gamma}{\tilde{F}_{\tilde{s}}} \right) |\tilde{\tau}_{\tilde{s}, \theta}|^2 \right), \quad (21)$$

となる. ただし, $\tilde{F}_{\tilde{s}} = (\beta \tilde{s}^2 + h) |\tilde{s}| + \gamma$ である.

一方、分母の分配関数 $\sum_{\sigma} p(\tau | \sigma) p(\sigma)$ であるが、周波数空間を極座標に沿って離散化した上で考えるものとする (図 3 参照). 動径方向と角度方向のサンプリング幅を各々 $\Delta_{\tilde{s}}$, Δ_{θ} とすると、離散化座 (\tilde{s}_k, θ_l) は、各々 $\tilde{s}_k = k\Delta_{\tilde{s}}$, $\theta_l = l\Delta_{\theta}$ と表せる. 角度方向のサンプリング幅は、センサアレイの観測角度に対応する. ここでは $\Delta_{\theta} = \pi/N_{\theta}$ とし、 $[0, \pi]$ を N_{θ} 等分した各点において観測することを仮定した. 一方、動径方向のサンプリング幅 $\Delta_{\tilde{s}}$ であるが、 \tilde{s} が、 s の周波数表現であることから、Fourier 変換 (4) から決定する必要がある. 今、長さ L のセンサアレイ上に N_s 個のセンサを等間隔に配置することを考える. このとき、Fourier 変換 (4) を離散化して表現すると、

$$\tilde{\tau}(\tilde{s}_k, \theta_l) = \int ds \tau(s, \theta) e^{-2\pi j s \tilde{s}_k} \quad (22)$$

$$\sim \sum_{k=0}^{N_s-1} \Delta_s \tau(s_k, \theta_l) e^{-2\pi j s_k \tilde{s}_k} \quad (23)$$

と書ける. このときのナイキスト周波数は、 $1/2\Delta_s$ であり、対応する離散フーリエ変換は、周波数空間の定義域を $[-1/2\Delta_s, 1/2\Delta_s]$ とし、この区間を N_s 等分したサンプリング点での値で表現されることになる. このことから、周波数空間のサンプリング間隔は、 $\Delta_{\tilde{s}} = 1/N_s \Delta_s$ と書けることになる. 以上の議論から式 (4) の Fourier 変換対は、

$$\tilde{\tau}(\tilde{s}_k, \theta_l) \sim \Delta_s \sum_{k=0}^{N_s-1} \tau_{k,l} e^{-2\pi j \frac{k\tilde{s}_k}{N_s}} = \Delta_s \tilde{\tau}_{k,l} \quad (24)$$

$$\tau(s_k, \theta_l) \sim \frac{1}{N_s} \sum_{k=0}^{N_s-1} \tilde{\tau}_{k,l} e^{-2\pi j \frac{k\tilde{s}_k}{N_s}} \quad (25)$$

という離散フーリエ変換対 $\{\{\tau_{k,l}\}, \{\tilde{\tau}_{k,l}\}\}$ を用いて表現できる. ここで、式 (20) に含まれる積分 $\int d\tilde{s}$ を $\sum_{k=0}^{N_s-1} \Delta_{\tilde{s}}$ とし、離散化を行うと、周辺化事後確率

$$p(\sigma_{\tilde{k},l} | \tau) = \mathcal{N}\left(\sigma_{\tilde{k},l} \mid \frac{\gamma}{F_k} \tilde{\tau}_{k,l}, \frac{N_s}{8\pi^2 \Delta_{\theta} F_k}\right) \quad (26)$$

が得られる. ただし、 $\mathcal{N}(x | \mu, S)$ は、 x を確率変数とした平均 μ , 分散 S の正規分布の確率密度を表すものとする. また、周波数空間上の各サンプリングポイント $\tilde{\sigma}_{\tilde{k},l}$, $\tilde{\tau}_{k,l}$, \tilde{F}_k は、それぞれ $\tilde{\sigma}_{\tilde{k},l} = \tilde{\sigma}_{\tilde{s}_k, \theta_l}$, $\tilde{\tau}_{k,l} = \tilde{\tau}_{\tilde{s}_k, \theta_l}$, $\tilde{F}_k = \tilde{F}_{\tilde{s}_k} = (\beta \tilde{s}_k^2 + h) |\tilde{s}_k| + \gamma$ を表すものとした.

2.4 画像修復

画像修復の戦略としては、周辺事後分布による期待値 $\langle \sigma(x, y) \rangle$ を取る戦略を考える. Fourier 表現の線形性を

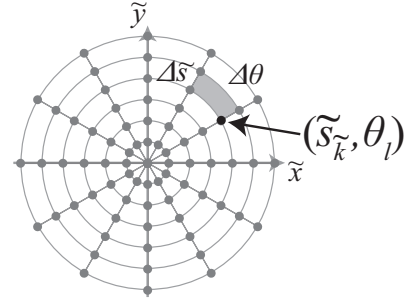


図 3 周波数空間における離散化方法: 極座標上での離散化を行う.

考慮すると

$$\langle \sigma(x, y) \rangle = \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{s} |\tilde{s}| \langle \tilde{\sigma}_{\tilde{s}, \theta} \rangle e^{2\pi j \tilde{s}(x \cos \theta + y \sin \theta)} \quad (27)$$

と書ける. したがって、 $\langle \sigma(x, y) \rangle$ を求めるためには、Fourier 空間における空間周波数の集合 $\{\langle \tilde{\sigma}_{\tilde{s}, \theta} \rangle\}$ を求めれば良く、 $\langle \tilde{\sigma}_{\tilde{s}, \theta} \rangle$ は形式的に

$$\langle \tilde{\sigma}_{\tilde{s}, \theta} \rangle = \frac{\sum_{\sigma} \tilde{\sigma}_{\tilde{s}, \theta} e^{-4\pi^2 \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{s} \tilde{F}_{\tilde{s}} \left| \tilde{\sigma}_{\tilde{s}, \theta} - \frac{\gamma}{\tilde{F}_{\tilde{s}}} \tilde{\tau}_{\tilde{s}, \theta} \right|^2}}{\sum_{\sigma} e^{-4\pi^2 \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{s} \tilde{F}_{\tilde{s}} \left| \tilde{\sigma}_{\tilde{s}, \theta} - \frac{\gamma}{\tilde{F}_{\tilde{s}}} \tilde{\tau}_{\tilde{s}, \theta} \right|^2}} \quad (28)$$

と書ける. 式 (28) を計算する為に前節と同様に周波数空間の極座標上で離散化を行なって解を求めると

$$\langle \tilde{\sigma}_{\tilde{k}, l} \rangle = \frac{\gamma}{\tilde{F}_k} \tilde{\tau}_{k,l} \quad (29)$$

となる. これは式 (26) において MAP (Maximum A Priori) 戦略を採った時の解と一致する.

以上により求めた $\{\langle \tilde{\sigma}_{\tilde{k}, l} \rangle\}$ を用いて、FBP 法に出てくる関数 $g(s, \theta)$ の位置 (s_k, θ_l) における期待値 $\langle g_{k,l} \rangle = \langle g(s_k, \theta_l) \rangle$ を計算すると

$$\begin{aligned} \langle g_{k,l} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{s} |\tilde{s}| \langle \tilde{\sigma}_{\tilde{s}, \theta_l} \rangle e^{2\pi j s_k \tilde{s}} \\ &\sim \frac{1}{N_s} \sum_{k=0}^{N_s-1} |\tilde{s}_k| \langle \tilde{\sigma}_{\tilde{k}, l} \rangle e^{2\pi j \frac{k\tilde{s}_k}{N_s}} \end{aligned} \quad (30)$$

となる.

この $\langle g_{k,l} \rangle$ を元に画像空間での位置 (x, y) に対応する画素値の平均 $\langle \sigma(x, y) \rangle$ を推定することを考える. この場合は $s = x \cos \theta + y \sin \theta$ という関係があるので、 s が丁度サンプル格子点に乗るとは限らない. そこで線形補間で画素値を推定することにする. すなわち $s_{k^*} \leq s < s_{k^*+1}$ となるような、 k^* を探し出し、 $v = \frac{s - s_{k^*}}{\Delta_s}$ とした上で、

$$\langle g(s, \theta_l) \rangle = (1 - v) \langle g_{k^*, l} \rangle + v \langle g_{k^*+1, l} \rangle \quad (31)$$

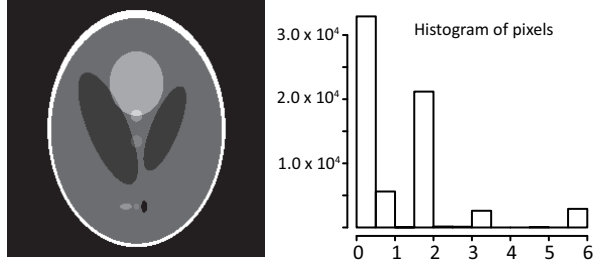


図4 Logan-Shepp ファントム画像と画素値のヒストグラム. Logan-Shepp ファントム画像は体断面を模式的に表現し, CT/PET 画像の再構成シミュレーションとして用いられる. 図はプログラミング言語 R の拡張パッケージによって生成している. 右図はこのファントム画像の画素値のヒストグラムを表す. 背景色の黒は画素値 0 で表され, もっとも明るい白色も 6.0 程度の画素値で表現されている.

と置くことにする. 最終的に求めたい再構成の位置 (x, y) における期待値 $\langle \sigma(x, y) \rangle$ は

$$\langle \sigma(x, y) \rangle = \int_0^\pi d\theta \langle g(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) \rangle \quad (32)$$

$$\sim \Delta_\theta \sum_{l=0}^{N_\theta-1} \langle g(x \cos \theta_l + y \sin \theta_l, \theta_l) \rangle \quad (33)$$

と近似できる.

2.5 ハイパーパラメータ推定

画像修復を行なうためには, ハイパーパラメータ β, h, γ を推定する必要がある. これらのハイパーパラメータを対数周辺尤度最大化の枠組みで求めることを考える. 対数周辺尤度は

$$\ln p(\tau | \beta, h, \gamma) = \ln Z_{\text{post}}(\beta, h, \gamma) - \ln Z_n(\gamma) - \ln Z_{\text{pri}}(\beta, h). \quad (34)$$

のように 3 つの分配関数, すなわち事後分布の分配関数 Z_{post} , 観測チャンネルの分配関数 Z_n , 事前分布の分配関数 Z_{pri} , 各々の対数で記述でき, これらの分配関数は各々

$$Z_{\text{pri}}(\beta, h) = \sum_{\sigma} e^{-H_{\text{pri}}(\sigma | \beta, h)} \quad (35)$$

$$Z_n(\gamma) = \sum_{\tau} e^{-H_n(\tau | \sigma, \gamma)} \quad (36)$$

$$Z_{\text{post}}(\beta, h, \gamma) = \sum_{\sigma} e^{-H_{\text{pri}}(\sigma | \beta, h) - H_n(\tau | \sigma, \gamma)} \quad (37)$$

とかける. 各分配関数の積分に対して前節までの議論と同様な離散化を行うと, 定数部分を除いて以下のように

表1 推定したハイパーパラメータ値. 事前分布に関わるハイパーパラメータ β, h は画像の事前分布 (式 (17) 参照) に, γ は観測過程 (式 (14) 参照) に関わるハイパーパラメータ.

標準偏差	β	h	γ
0.5	8.54×10^{-3}	3.28×10^{-2}	1.65×10^4
1.0	7.80×10^{-3}	3.62×10^{-2}	2.76×10^3
2.0	7.14×10^{-3}	3.94×10^{-2}	4.96×10^2
4.0	6.73×10^{-3}	4.17×10^{-2}	1.07×10^2

表現できる:

$$\ln Z_{\text{pri}}(\beta, h) = -\frac{N_\theta}{2} \sum_{k=0}^{N_s-1} \ln(\beta \tilde{s}_k^2 + h) \quad (38)$$

$$\ln Z_n(\gamma) = -\frac{N_\theta N_s}{2} \ln \gamma \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \ln Z_{\text{post}}(\beta, h, \gamma) = & -\frac{4\pi^2 \Delta_\theta}{N_s} \sum_{k=0}^{N_s-1} \gamma \left(1 - \frac{\gamma}{\tilde{F}_k}\right) |\tau_{k,l}|^2 \\ & -\frac{N_\theta}{2} \sum_{k=0}^{N_s-1} \ln \tilde{F}_k. \end{aligned} \quad (40)$$

あとは, 周辺対数尤度を各ハイパーパラメータに関して勾配を求め, これを $\mathbf{0}$ とおくことによってハイパーパラメータ推定を行うことができる. ただし解析的に解くことは困難であるため, ハイパーパラメータ推定は, 式 (34) を最大化するような, β, h, γ を勾配法で求めることとした. すなわち

$$\begin{pmatrix} \beta^{t+1} \\ h^{t+1} \\ \gamma^{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^t \\ h^t \\ \gamma^t \end{pmatrix} + \eta \nabla \ln p(\tau | \beta, h, \gamma) \quad (41)$$

によってハイパーパラメータを更新する.

3 計算機実験

計算機実験における座標系は以下のような形で取るものとした. まず, Logan-Shepp ファントム画像を $N_x \times N_y$ の大きさで生成し, これを原点を中心とした縦横 L の長さの正方形 $[-L/2, L/2] \times [-L/2, L/2]$ 内の領域にマッピングしたものを原画像とした. また原点を中心とした半径 $L/2$ の円の外側はセンサアレイに投影したときに, 観測角度によっては観測できない場合もあるため, この部分には観測対象は存在しないものとした. また各観測角度 θ_l において s の座標系は, 図 1 のように考え, 原点 $s = 0$ の位置は, (x, y) 座標系の原点を s 軸上に垂直に投影した点にとるものとした. 今回の実験で

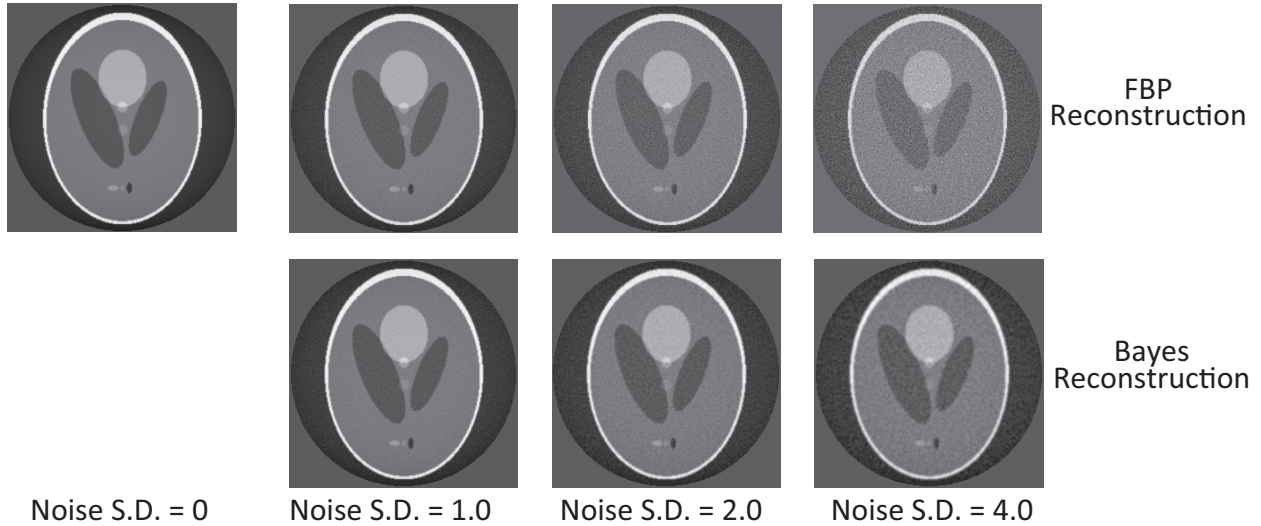


図6 再構成画像の画質比較. 上段は FBP 法による再構成結果, 下段は Bayes 法でハイパーパラメータ推定を行った後に再構成した結果. 各列は観測時に加えるノイズの標準偏差を変えて再構成した結果を示している.

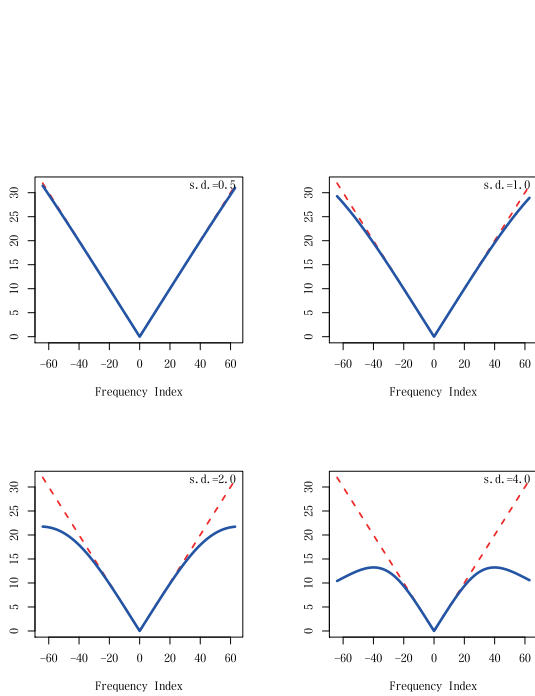


図5 推定された再構成フィルタの周波数空間での表現. 加えるノイズの標準偏差の大きさを表1に従って設定した. 標準偏差の大きさは, 上段左からは 0.5, 1.0, 下段左からは 2.0, 4.0 に各々設定した. ノイズの大きさが小さい時は図2左の様なフィルタを構成するのに対して, ノイズが大きくなると, 図2右の様なフィルタをf構成し, さらにノイズが大きくなると大きく高周波成分が抑制される.

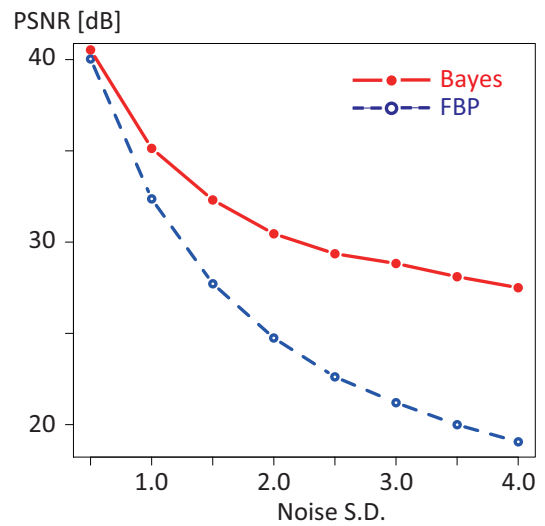


図7 再構成画像の画質の数値比較. 横軸は観測時に加えるノイズの標準偏差を表し, 縦軸は PSNR を示している. PSNR 値は高いほうが画質が良いことを表す.

は, $N_x = N_y = N_\theta = N_s = 256$ とし, センサの長さは $L = 1$ とした. 図4に今回の実験で用いた Logan-Shepp ファントム画像と, その画素値のヒストグラムを示す. これからわかるように原画像の画素値は $[0, 6]$ の値で表現されている.

観測過程においては, Radon 変換においてガウスノイズ $n_p(x, y)$ が加わるものとした. このとき $n_p(x, y)$ の標準偏差が, $0 \sim 4$ の範囲で変化させ, ハイパーパラメータ推定を行った画像の画質評価を行った.

表1に式(41)によって推定したハイパーパラメータ値を示す. 画像の事前分布に関わるハイパーパラメータ

β , および h の大きさはほとんど変化していないのに対して, 観測過程に関わるハイパーパラメータは, ノイズの標準偏差が大きくなるほど観測精度を示す γ の値が小さくなっていることから, 定性的には妥当な結果であるように見える. また, それぞれの推定ハイパーパラメータ結果に対して, 得られた再構成フィルタの周波数空間での表現を図 5 に示す. 図よりノイズの標準偏差が小さい時は, Ramachandran-Lakshminarayanan 型のフィルタ関数 (図 2 左上参照) であるが, 重畳されるノイズの標準偏差が大きくなるにつれ, 高周波成分を落とすようなフィルタが自動的に構成されていることがわかる.

これらの推定ハイパーパラメータ値を用いて画像再構成の計算機シミュレーションを行った. 得られた再構成結果を図 6 に示す. 図 6 の上段は従来手法である FBP 法を用いて再構成を行った結果である. 比較対象の FBP 法としては数理的なアルゴリズムとして導かれる Ramachandran-Lakshminarayanan らの手法を用いている [1]. 一方, 図 6 下段は本研究で提案しているハイパーパラメータ推定を行った上で Bayes 手法を用いて再構成を実行した結果を示している. 目視においても従来手法である FBP 法においては混入するノイズが大きくなるほど, 画質が劣化していくのが目視で確認できる.

さらに画質の数値比較を行う手段として PSNR (Peak Signal to Noise Ratio) を用いて画質評価を行った結果を図 7 に示す. 図 7 の横軸は観測時に加えるノイズの標準偏差を表し, 縦軸には PSNR 値を表している. PSNR 値は値が大きいほど画質劣化が少ないことを表す. 図中のグラフからわかるように Bayes 手法を用いた場合は, PSNR の意味において再構成時における画質劣化が抑えられ, ノイズの標準偏差が 4.0 の場合にも 27.5 [dB] 程度を維持できることが示されている. 一方 FBP 法では標準偏差が 1.5 程度で, 既に PSNR 値が 27.7 [dB] 程度まで下がってしまう. 以上の議論から, 周波数フィルタに工夫をしていない FBP 法と比べて, 我々の提案する手法の方が観測ノイズに関して耐性が大きいといえる.

4 まとめ

Radon 変換を用いるような観測系における画像修復の議論を Bayes 推定の枠組みで行なった. 事前分布としては, 隣接ピクセル間での滑らかさを制御する MRF 的なガウス分布 $p(\sigma)$ を導入し, 観測過程はガウスチャネルを通して行なわれるものとして, $p(\tau | \sigma)$ を定式化した.

離散化を極座標系上で行うことによって, 事後分布が可解モデルとして取り扱うことができるようになることを示し, これを用いて MAP 推定値および, 平均ピクセル値 $\langle \sigma(x, y) \rangle$ の推定の手続きを記述した.

さらに事後分布に含まれるハイパーパラメータ β, h, γ を周辺対数尤度最大化原理から求める手続きを示し, 計算機実験としてハイパーパラメータを求めた上で画像再構成を行った結果を示した.

参考文献

- [1] G. N. Ramachandran and A. V. Lakshminarayanan: Three-dimensional reconstruction from radiographs and electron micrographs, *Proc. Natl. Acad. Sci.*, **vol.68**, pp.2236–2240, 1971.
- [2] L. A. Shepp and B. F. Shepp: The Fourier reconstruction of a head section, *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, **vol.NS-21**, pp.21-43, 1974.
- [3] K. Tanaka and J. Inoue: Maximum likelihood hyperparameter estimation for solvable Markov random field model in image restoration, *IEICE Trans. Inf. Syst.*, **vol. E85-D**, No.3, 2002.
- [4] K. Tanaka: Statistical-mechanical approach to image processing, *J. Phys. A*, **vol. 35**, No.37, pp. 546 – 557, 2002.
- [5] K. Tanaka, H. Shouno, M. Okada and D. M. Titterton: Accuracy of the Bethe Approximation for Hyperparameter Estimation in Probabilistic Image Processing, *J. Phys. A*, **vol. 37**, No.36, pp. 8675 – 8696, 2004. pp.329-338, 2003.