IBIS2009 2009年10月19日

金融リスクとコピュラ
～依存構造がリスクに及ぼす影響～

日本銀行金融研究所

吉羽 要直

E-mail: toshinao.yoshiba@boj.or.jp

本講演で示されている意見は、講演者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。

アウトライン

１．コピュラとは？

２．コピュラの種類

３．コピュラの比較

４．実用化に必要な技術

５．市場リスクへの応用

６．信用リスクへの応用

７．まとめ

参考文献

1．コピュラとは？

- 同時分布を周辺分布の関数として解釈したもの
- **数学的定義：以下の**n**変量関数**C

$$
\begin{aligned}
F(x_1,\cdots,x_n) &= \Pr(X_1 \le x_1,\cdots,X_n \le x_n) \\
&= \Pr(F_1(X_1) \le F_1(x_1),\cdots,F_n(X_n) \le F_n(x_n)) \\
&= \Pr(U_1 \le F_1(x_1),\cdots,U_n \le F_n(x_n)) \\
&= C(F_1(x_1),\cdots,F_n(x_n))
\end{aligned}
$$

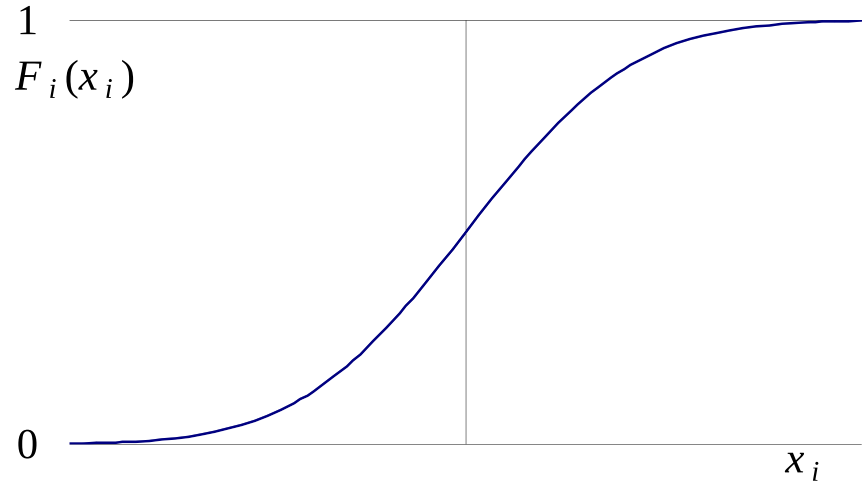
コピュラ（copula、接合分布関数）

- F：確率変数$X_1, X_2,\ldots, X_n$の（n変量）同時分布関数
- $F_1, F_2,\ldots, F_n$：周辺分布関数（$F_i(x) = \Pr(X_i \le x)$）

１．コピュラとは？

- コピュラの解釈
  - **確率変数**$(X_1, X_2,\ldots, X_n)$**の周辺分布での分布関数の値を新たな確率変数**$(U_1, U_2,\ldots, U_n)$**とすると（**$U_i = F_i(X_i),\ \ i = 1,\ldots,n$**）、各**$U_i$ **は**$[0,1]$**の一様分布に従う**

$$\begin{aligned}\Pr(U_i \le u_i) &= \Pr(F_i(X_i) \le u_i)\\ &= \Pr(X_i \le F_i^{-1}(u_i))\\ &= F_i(F_i^{-1}(u_i)) = u_i\end{aligned}$$



  - $[0,1]$**一様分布に従う**n**変量確率変数**$(U_1, U_2,\ldots, U_n)$**の同時分布関数がコピュラ**

１．コピュラとは？

- 直観的には
  - 変数間の相互依存関係を表す関数
    - 同時分布のうち、各変量独自の周辺分布を除いた部分の依存構造を示す
    - （線形）相関係数よりも一般的なもの
  - 依存性のある多変量の一様分布の同時分布関数
    - 各変量で$U_i = F_i\,(X_i) \rightarrow 0$は $X_i \rightarrow -\infty$
    - 各変量で$U_i = F_i\,(X_i) \rightarrow 1$は $X_i \rightarrow +\infty$

１．コピュラとは？

- 金融実務での利用
  - 複数の資産で構成されるポートフォリオのリスク管理
  - 原資産が複数ある商品（CDO、バスケット･オプションなど）のプライシング（価値評価）

- アプローチ
  - いくつかのリスクファクターを設定し、それらは多変量の確率分布に従うと想定し、分析
  - リスクファクターの周辺分布を設定するとともに、コピュラを設定することで、想定する多変量確率分布を規定

２．コピュラの種類

- 依存関係の表し方と様々なコピュラ
  - 特殊なコピュラ
    - 独立コピュラ　$C(u_1, u_2, \ldots, u_n) = u_1 u_2 \cdots u_n$
    - 共単調コピュラ　$C(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \min(u_1, u_2, \ldots, u_n)$
  - ノンパラメトリックなコピュラ
    - 経験同時分布から周辺分布（各変量での経験分布）を除いて構成
  - パラメトリックなコピュラ
    - 複数パラメータで依存関係を表わすコピュラ
    - 1パラメータで依存関係を表わすコピュラ

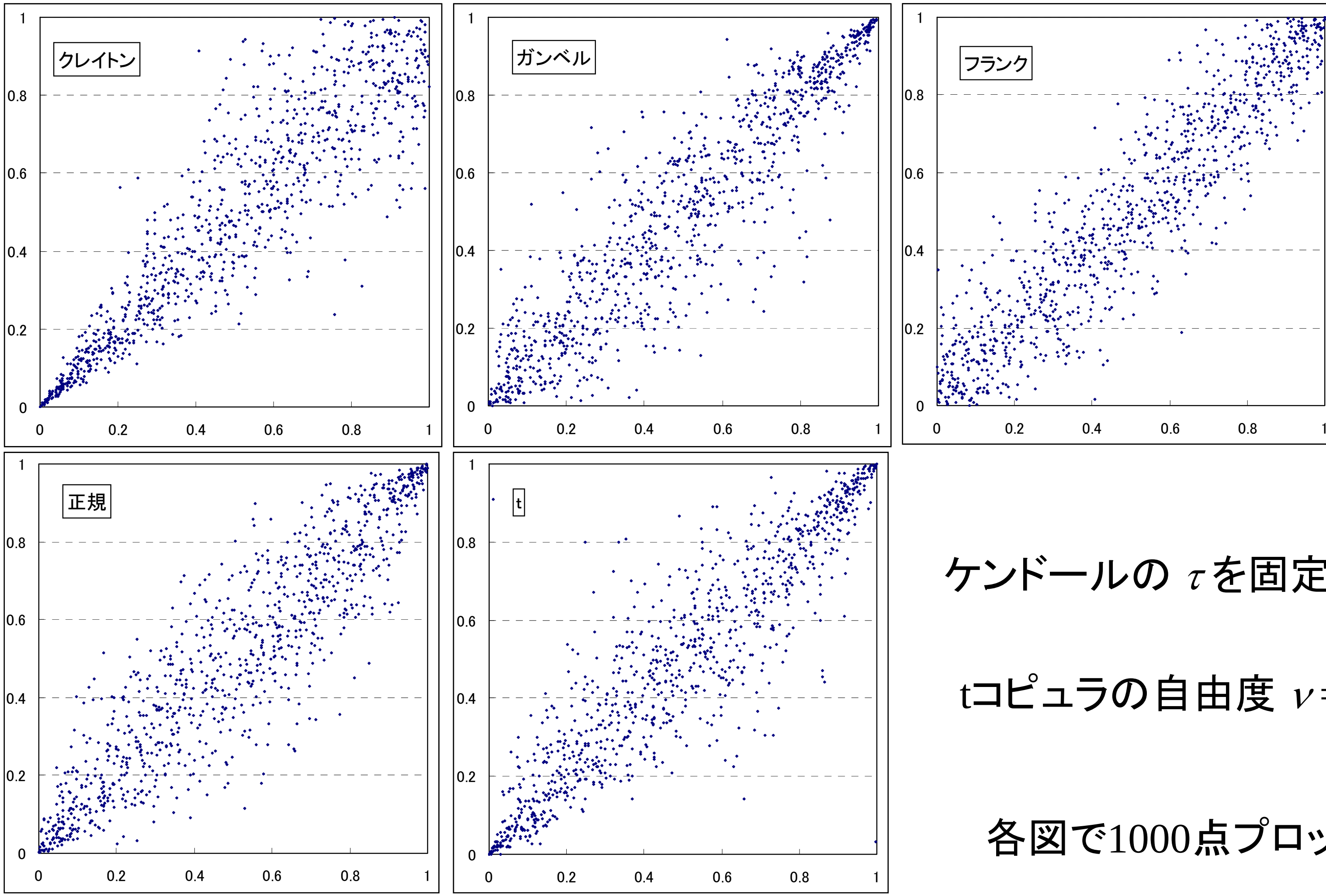
2. **コピュラの種類**

- **パラメトリックなコピュラ**
  - 相関行列を用いて**依存関係を表わすコピュラ**
    - 正規コピュラ(ガウシアン・コピュラ):パラメータは相関行列
    - t コピュラ:パラメータは自由度νと相関行列
  - 1**パラメータで依存関係を表わすコピュラ**
    - クレイトン・コピュラ
    - ガンベル・コピュラ
    - フランク・コピュラ

      アルキメディアン・コピュラ
    - 正規コピュラ(ただし、全ての相関を等しくρと置く)
    - tコピュラ(自由度を与え、全ての相関を等しくρと置く)

2. コピュラの種類

- 1パラメータ･コピュラの違いによる散布図（2変量）



ケンドールの τ を固定（0.75）

tコピュラの自由度 $\nu=3$

各図で1000点プロット

２．コピュラの種類

- 1パラメータ・アルキメディアン・コピュラ
  - クレイトン・コピュラ　　　　　　$0<\alpha<\infty$

$$C(u_1,u_2,\ldots,u_n)=(u_1^{-\alpha}+u_2^{-\alpha}+\cdots+u_n^{-\alpha}-n+1)^{-1/\alpha}$$

  - ガンベル・コピュラ　　　　　　$1<\gamma<\infty$

$$C(u_1,u_2,\ldots,u_n)=\exp[-\{(-\ln u_1)^{\gamma}+(-\ln u_2)^{\gamma}+\cdots+(-\ln u_n)^{\gamma}\}^{1/\gamma}]$$

  - フランク・コピュラ　　　　　　$0<\delta<\infty$

$$C(u_1,u_2,\ldots,u_n)=-\frac{1}{\delta}\ln\left\{1+\frac{(e^{-\delta u_1}-1)(e^{-\delta u_2}-1)\cdots(e^{-\delta u_n}-1)}{(e^{-\delta}-1)^{n-1}}\right\}$$

２．コピュラの種類

- アルキメディアン･コピュラとは
  - コピュラ$C\,(u_1,u_2,\ldots,u_n)$が、単調減少凸関数$\phi\,(u)$（生成関数と呼ぶ、 $\phi\,(1)=0$）を用いて、以下のように表せるコピュラ

$$C(u_1,u_2,\ldots,u_n)=\phi^{-1}(\phi(u_1)+\phi(u_2)+\cdots+\phi(u_n))$$

  - アルキメディアン・コピュラは数学的に扱いやすい。
  - 前述のクレイトン、ガンベル、フランク・コピュラはアルキメディアン･コピュラ（以下の生成関数）
    - クレイトン　$\phi(u_i)=u_i^{-\alpha}-1$
    - ガンベル　$\phi(u_i)=(-\ln u_i)^{\gamma}$
    - フランク　$\phi(u_i)=-\ln\dfrac{e^{-\delta u_i}-1}{e^{-\delta}-1}$

$\phi\,(0)=\infty$

2. コピュラの種類

- 正規コピュラ

$$C(u_1,\cdots,u_n)=\Phi_n(\Phi_1^{-1}(u_1),\cdots,\Phi_1^{-1}(u_n);\Sigma)$$

  - $\Phi_n(;\Sigma)$はn変量標準正規分布関数（Σ は相関行列）
    $\Phi_1^{-1}()$は1変量標準正規分布関数の逆関数

  - 各変量が1変量正規分布→n変量では相関Σの正規分布

$$F(x_1,\cdots,x_n)=C(\Phi_1(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}),\cdots,\Phi_1(\frac{x_n-\mu_n}{\sigma_n}))$$

$$=\Phi_n(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1},\cdots,\frac{x_n-\mu_n}{\sigma_n};\Sigma)$$

２．コピュラの種類

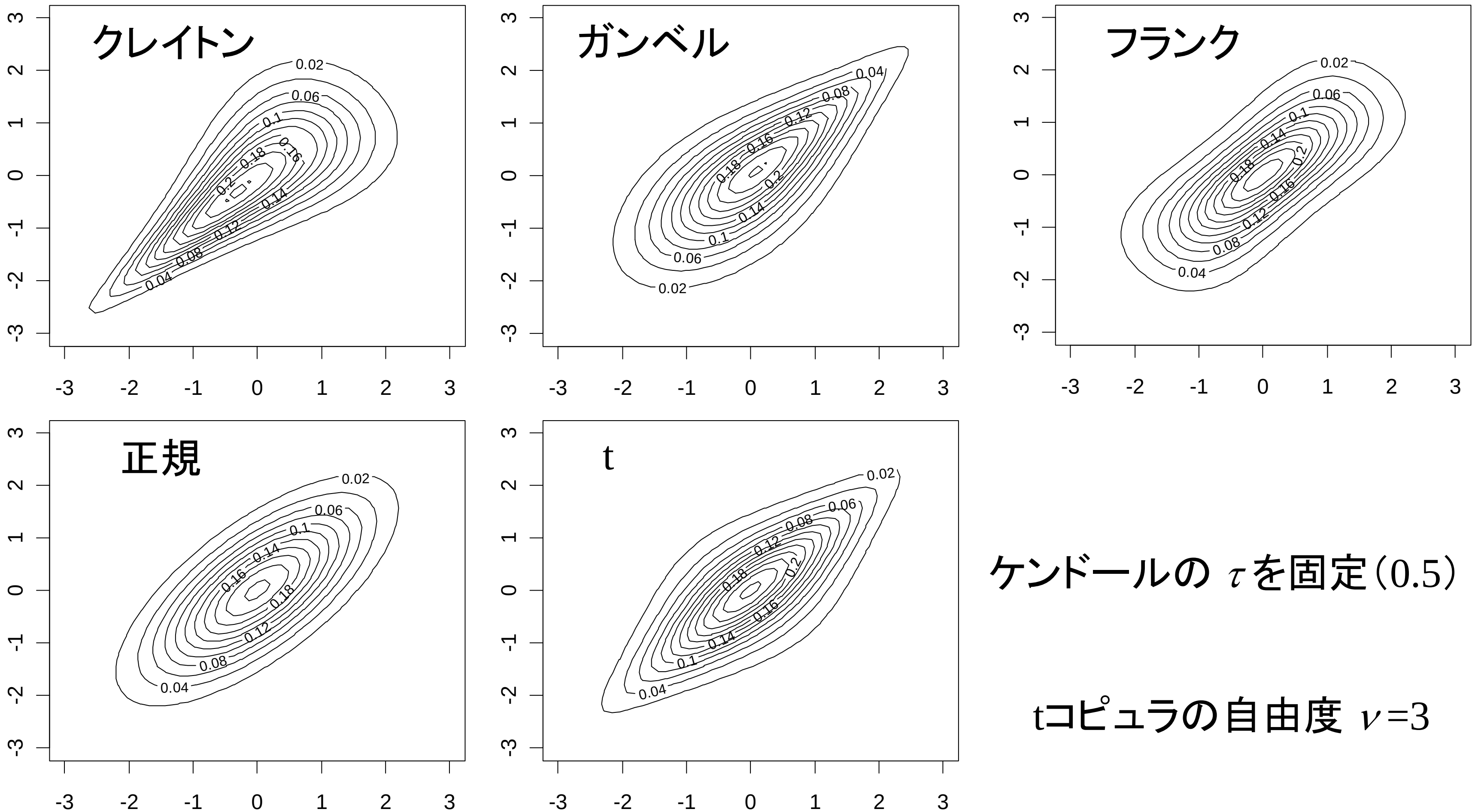
- t コピュラ

$$C(u_1,\cdots,u_n)=t_{n,\nu}(t_\nu^{-1}(u_1),\cdots,t_\nu^{-1}(u_n);\Sigma)$$

  - $\mathrm{t}_{n,\nu}(;\Sigma)$は$n$変量t分布の分布関数（$\Sigma$ は相関行列）
    $\mathrm{t}_\nu^{-1}()$は自由度νの1変量t分布の分布関数の逆関数
  - 各変量が自由度νの1変量t分布→n変量では自由度νのn変量t分布
  - 自由度$\nu\to\infty$ のとき正規コピュラに近づく

2. コピュラの種類

- 2変量同時密度の等高線：各変量は標準正規分布



ケンドールの τを固定(0.5)

tコピュラの自由度 ν=3

３．コピュラの比較

- コピュラの比較指標
  - 2変量を取り出したとき、
    - 全体的な依存性を示す指標:「順位相関係数」
    - 裾での依存性を示す指標:「裾依存係数」
    - 「順位相関係数」も「裾依存係数」ともに各変量の周辺分布に依存せず、コピュラの性質を抽出したもの。

（注意）通常の「線形相関係数」は各変量の周辺分布に依存し、比較指標にはならない。

３．コピュラの比較

- 全体の依存性:「順位相関」
  - データの「値」ではなく、任意の2変量の「順位」の「相関」
  - 代表的な順位相関:ケンドールのタウとスピアマンのロー
  - ケンドールのタウ　$\tau(X_1, X_2)$

$$\tau(X_1, X_2) \equiv 4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x_1, x_2)dF(x_1, x_2) - 1 = 4\int_0^1\int_0^1 C(u_1, u_2)dC(u_1, u_2) - 1$$

  - 別表現（同方向ペア–異方向ペア）

$$\tau(X_1, X_2) = \Pr\{(X_1^i - X_1^j)(X_2^i - X_2^j) > 0\} - \Pr\{(X_1^i - X_1^j)(X_2^i - X_2^j) < 0\}$$

3．コピュラの比較

- 2変量コピュラのパラメータとケンドールのタウτ

τ	クレイトンα	ガンベルγ	フランクδ	正規、t ρ
0	0	1	0	0
0.1	0.22	1.11	0.91	0.156
0.2	0.50	1.25	1.86	0.309
0.3	0.86	1.43	2.92	0.454
0.4	1.33	1.67	4.16	0.588
0.5	2.00	2.00	5.74	0.707
0.6	3.00	2.50	7.93	0.809
0.7	4.67	3.33	11.4	0.891
0.8	8.00	5.00	18.2	0.951
0.9	18.0	10.0	38.3	0.988
1	∞	∞	∞	1

←Joe [1997] Table 5.1
を修正

コピュラ	ケンドールのタウ
クレイトン	$\alpha/(\alpha+2)$
ガンベル	$1-1/\gamma$
フランク	$1+(4/\delta)\{D_1(\delta)-1\}$
正規	$(2/\pi)\arcsin\rho$
t	$(2/\pi)\arcsin\rho$

３．コピュラの比較

- 裾での依存性：「裾依存係数」
  - 2変量X_1、X_2に注目し、一方の分布関数の値が閾値uより大きくなる（小さくなる）とき、もう一方も大きくなる（小さくなる）確率（の極限値）
  - 上側裾依存係数 λ_U

$$\lambda_U = \lim_{u \to 1-} \Pr(F_2(X_2) > u \mid F_1(X_1) > u)$$

    - λ_U =0 ならば、「上側で漸近独立」という。λ_U が0より大きければ「上側で漸近従属」という。
  - 下側裾依存係数 λ_L

$$\lambda_L = \lim_{u \to 0+} \Pr(F_2(X_2) < u \mid F_1(X_1) < u)$$

    - λ_L =0 ならば、「下側で漸近独立」という。λ_L が0より大きければ「下側で漸近従属」という。

３．コピュラの比較

- 各コピュラの裾依存係数

コピュラ	上側 λ_U	下側 λ_L
クレイトン	0	$2^{-1/\alpha}$
ガンベル	$2-2^{1/\gamma}$	0
フランク	0	0
正規	0	0
t	$2\left(1-t_{\nu+1}\left(\sqrt{\frac{(1-\rho)(\nu+1)}{(1+\rho)}}\right)\right)$	$2t_{\nu+1}\left(-\sqrt{\frac{(1-\rho)(\nu+1)}{(1+\rho)}}\right)$

漸近従属　　漸近独立

４．実用化に必要な技術

（１） コピュラの選択

AIC, BICなどの統計規準を用いる

裾の依存度合いの適切さ

極値→極値コピュラなど、理論的に自然なコピュラ

– アルキメディアンではガンベルが極値コピュラ（渋谷・高橋[2008]を参照）

（２） コピュラのパラメータ推定

最尤推定の場合：尤度関数は？

（３） コピュラに従う乱数の発生方法

上手な発生方法：クレイトン・ガンベル・フランク・正規・t

戸坂・吉羽[2005]（2009/10/20日改訂＜訂正・正誤＞）を参照

5. 市場リスクへの応用

- 株価変動の実証分析（戸坂・吉羽[2005]）
  - 電機メーカー5銘柄（日立製作所、東芝、三菱電機、日本電気、三洋電機）の市場リスクを評価
  - 観測期間：1999/1/4～2001/12/30
  - 各変量（日次収益率）の周辺分布：両側指数分布

$$f(x) = \frac{1}{2q}\exp\left(-\left|\frac{x-p}{q}\right|\right), \quad q>0$$

  - 変量間の依存関係：4種類のコピュラ（正規、t、ガンベル、クレイトン）
    - ガンベルはデータを反転して適用

５．市場リスクへの応用

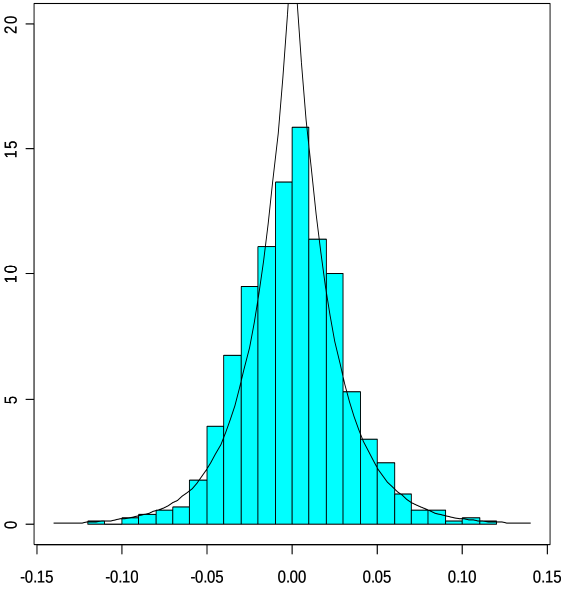
- 周辺分布の推定
  - パラメータp, q の推定

$$f(x) = \frac{1}{2q}\exp\left(-\left|\frac{x-p}{q}\right|\right), \quad q > 0$$

	日立製作所	東芝	三菱電機	日本電気	三洋電機
位置: p	0.000438	–0.000509	0.000522	0.000359	0.000820
尺度: q	0.018179	0.019241	0.020787	0.021139	0.020076

$$\text{収益率}: X_i(t) = \frac{S_i(t) - S_i(t-1)}{S_i(t-1)}$$

経験分布と両側指数分布の例（日本電気株）→



５．市場リスクへの応用

- 周辺分布でデータ変換

収益率

日付	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	−0.001	−0.032	−0.063	−0.007	0
2	0.02	0.0231	0.0364	0.002	−0.009
3	0.0509	0.0373	0.0293	0.0413	0.0119
4	−0.008	−0.006	0.0115	0.014	0.0059
5	0.0054	0.0175	0.0392	0.0238	−0.003
6	0.004	−0.001	0.0027	0.0224	−0.021
7	0.012	0.0144	0.0136	0.0193	0.009
8	0.0516	0.0071	0.0371	0.0129	−0.015
9	−0.011	0.0252	0.0155	0.0136	−0.018
10	−0.018	−0.003	−0.013	−0.008	0
11	0.0356	0.0394	0.0556	0.0169	0.0061
12	0.0247	0.008	0.0122	−0.02	−0.012
13	−0.017	−0.005	−0.012	−0.037	0.0184
14	−0.039	−0.005	0	−0.012	0
15	−0.006	0.0027	0.0073	0.008	−0.006
⋮			⋮		

変換後:[0,1]一様

U_1	U_2	U_3	U_4	U_5
0.5491	0.9034	0.9762	0.6444	0.52
0.1707	0.1469	0.0891	0.4635	0.6921
0.0311	0.0701	0.1251	0.0722	0.2884
0.6872	0.6217	0.2949	0.2623	0.3886
0.3806	0.1959	0.0777	0.1649	0.5853
0.4104	0.5238	0.4493	0.1765	0.8297
0.2648	0.2305	0.2664	0.2043	0.3332
0.0299	0.3364	0.0859	0.2758	0.7725
0.7391	0.1313	0.2432	0.267	0.807
0.8184	0.5554	0.7379	0.6575	0.52
0.0722	0.0627	0.0354	0.2287	0.3837
0.1317	0.3218	0.2849	0.8119	0.74
0.8107	0.6103	0.729	0.9128	0.2082
0.9436	0.6109	0.5124	0.7277	0.52
0.6581	0.4238	0.3601	0.3476	0.6457
		⋮		

$$F_i(x_{ij}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\exp\left(\dfrac{x_{ij} - \hat{p}_i}{\hat{q}_i}\right) & x_{ij} \le \hat{p}_i \\ 1 - \dfrac{1}{2}\exp\left(-\dfrac{x_{ij} - \hat{p}_i}{\hat{q}_i}\right) & x_{ij} > \hat{p}_i \end{cases}$$

５．市場リスクへの応用

- コピュラのパラメータ推定（最尤推定）

正規

Σ	1	0.539405	0.536943	0.569717	0.383190
	0.539405	1	0.597219	0.621137	0.414482
	0.536943	0.597219	1	0.553996	0.443241
	0.569717	0.621137	0.553996	1	0.393412
	0.383190	0.414482	0.443241	0.393412	1

t

自由度	6				
Σ	1	0.584118	0.571661	0.607913	0.426034
	0.584118	1	0.638485	0.667614	0.450915
	0.571661	0.638485	1	0.597704	0.477843
	0.607913	0.667614	0.597704	1	0.448515
	0.426034	0.450915	0.477843	0.448515	1

ガンベル

γ	1.380645

クレイトン

α	0.723174

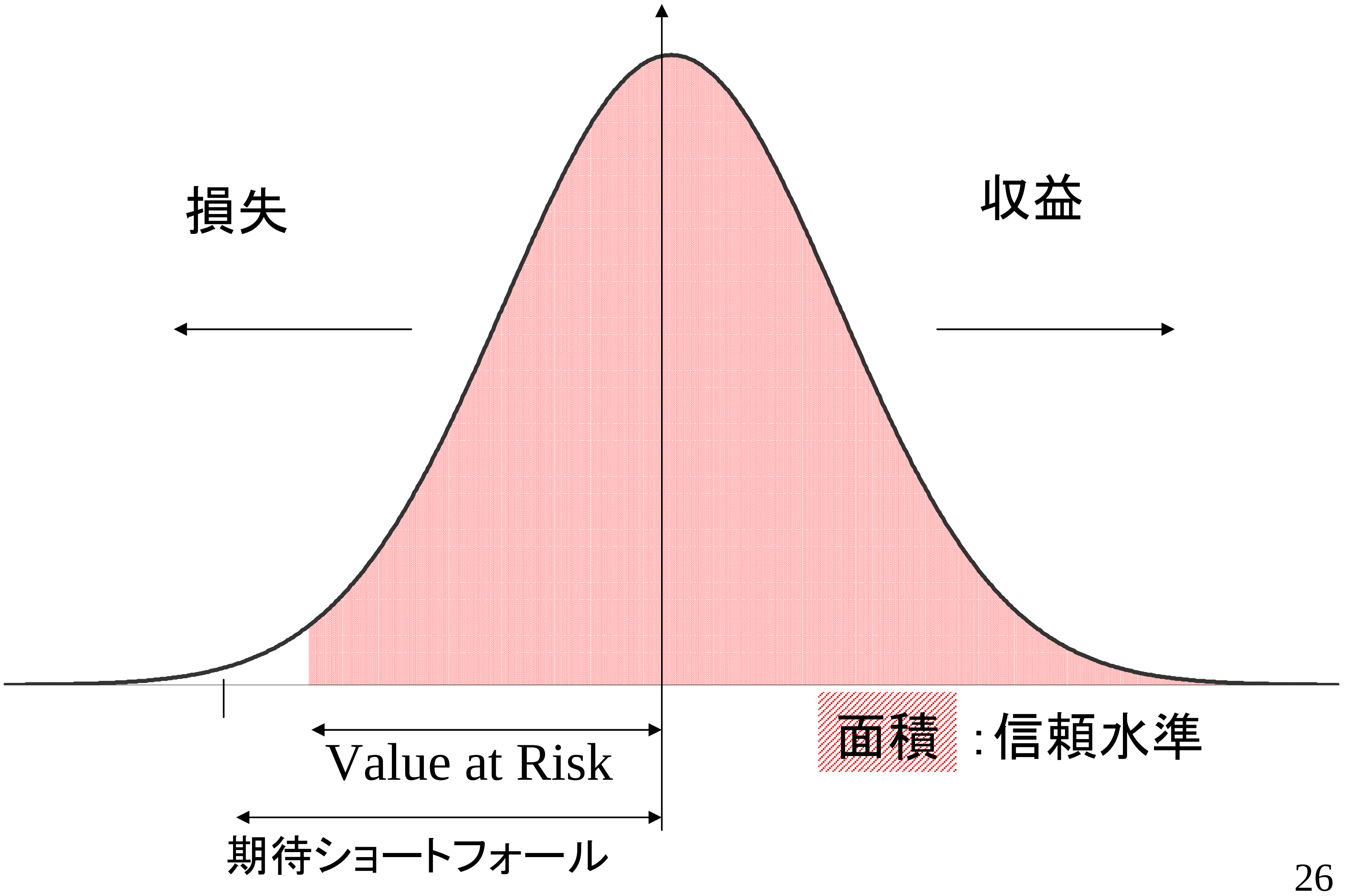
５. 市場リスクへの応用

- 推定値の分析
  - tコピュラの自由度が6と小さい→裾での依存性が高い可能性

- 市場リスクの評価
  - 市場リスク：想定するポートフォリオの日次損益分布の指標（例：標準偏差、分位点）
  - 代表的な市場リスク指標：VaR（Value-at-Risk）、期待ショートフォール（ES）
  - VaR：分位点（99%VaR→VaR以上の損失は1%）
  - ES: VaRを超える損失の期待値

５．市場リスクへの応用

- 市場リスクの指標：VaR とES



５．市場リスクへの応用

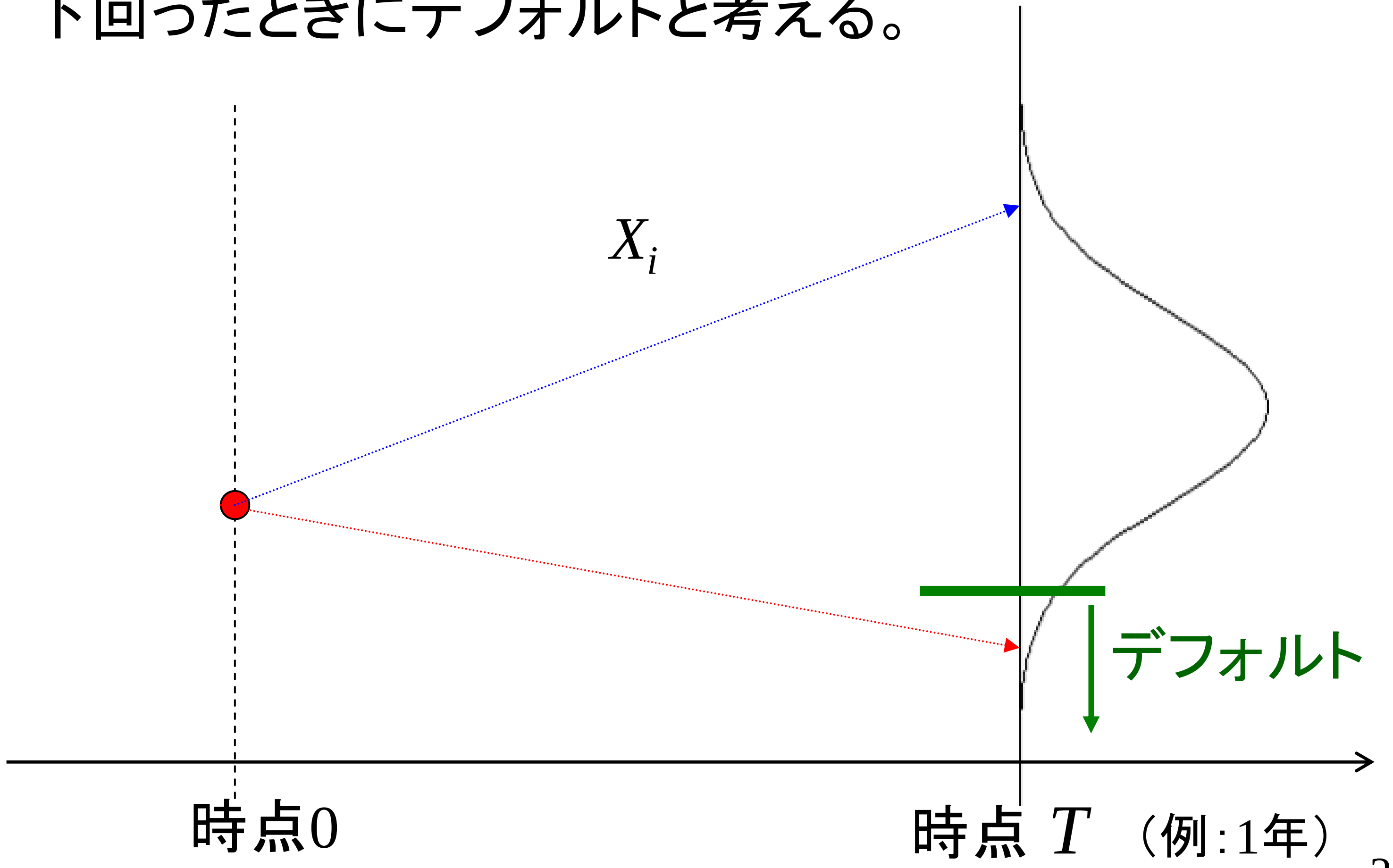
- 市場リスクの評価
  - 各銘柄を1/5単位ずつ保有するポートフォリオ
  - VaR、ES（期待ショートフォール）を損失率で表示
    - シミュレーション回数：50万回

コピュラ	VaR（99%） ES（99%）	VaR（99.5%） ES（99.5%）	VaR（99.9%） ES（99.9%）	VaR（99.99%） ES（99.99%）
正規	5.43% 6.61%	6.27% 7.43%	8.17% 9.29%	10.7% 11.7%
t	5.82% 7.34%	6.86% 8.40%	9.33% 10.9%	13.1% 14.3%
ガンベル	6.23% 8.03%	7.46% 9.27%	10.4% 12.2%	14.4% 16.3%
クレイトン	6.27% 8.01%	7.48% 9.23%	10.3% 12.1%	14.4% 15.9%

  - 正規コピュラではリスクを過小評価している可能性！

6. 信用リスクへの応用

- 1期間構造型モデル
  - 各貸出債権の資産状態を変数 X_i で表し、一定の閾値を下回ったときにデフォルトと考える。



６．信用リスクへの応用

- 信用ポートフォリオのリスク評価・価値評価例
  - 貸出先（n社）の資産状態変数はコピュラで規定される依存関係を持つ

  - 均一ポートフォリオで回収率ゼロならば、
    - リスク評価→デフォルト件数の分布を評価
    - 価値評価→デフォルト件数の期待値評価

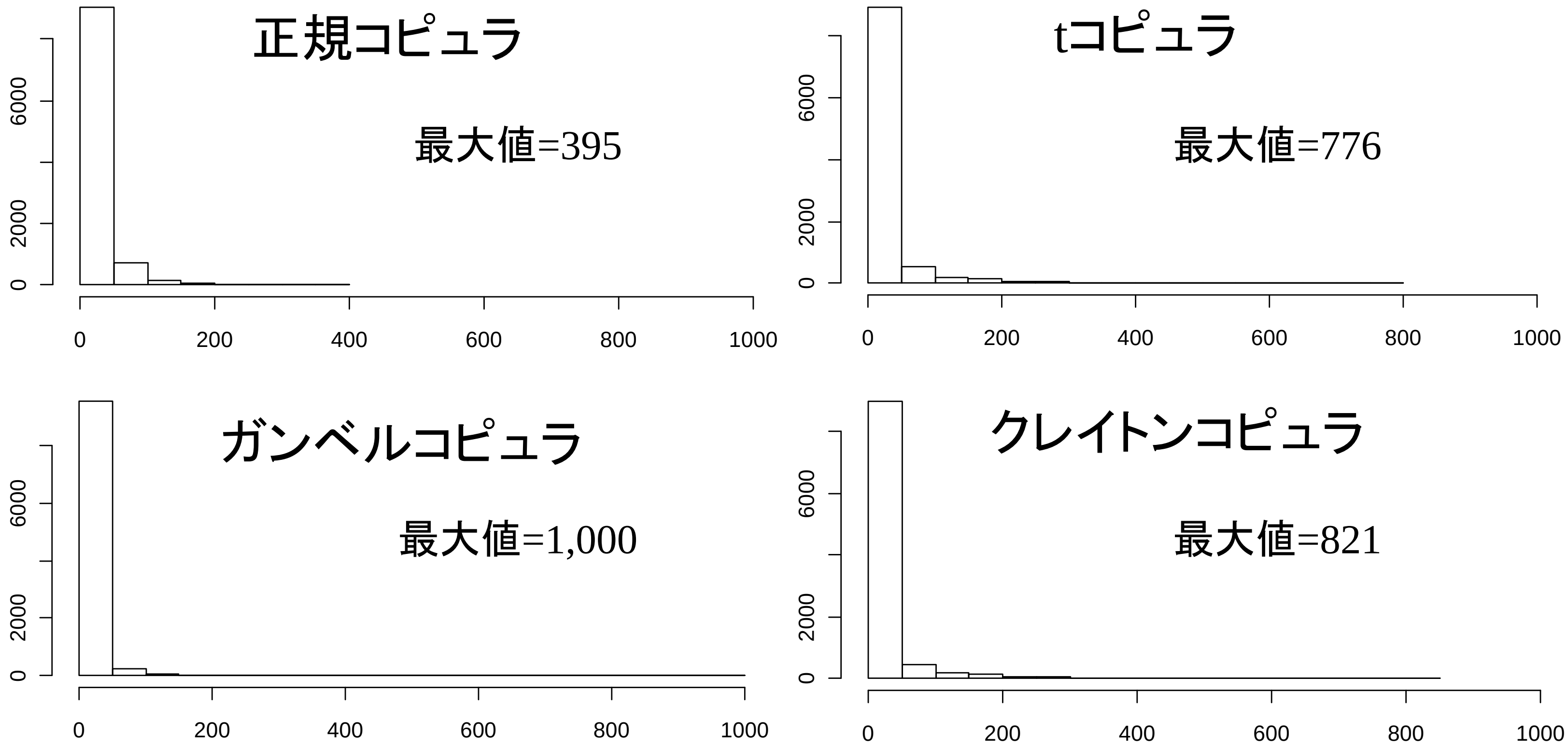
  - 均一ポートフォリオ：
    - 各社への貸出額は同一、各社のデフォルト確率は等しく、各社の状態変数間の順位相関（ケンドールのタウ）はすべて同一

６．信用リスクへの応用

- 信用ポートフォリオのリスク評価例
  - n社＝1千社
  - デフォルト確率　$\Pr(X_i \le k)=2\%$　（k:デフォルト閾値）
  - 状態変数間のケンドールのタウ　$\tau(X_i , X_j)=0.15, 0.02$
  - 状態変数間の依存関係$\Pr(X_1 \le k,\ldots, X_n \le k)$は4種類の1パラメータ・コピュラ（正規、t、ガンベル、クレイトン）で表現
    - tコピュラの自由度は5。
  - シミュレーションによりデフォルト件数の分布を算出
    - $X_1,\ldots,X_n$をシミュレートし閾値kを下回った企業がデフォルト
    - ガンベルは反転させて適用

６．信用リスクへの応用

- デフォルト件数の分布
  - 期待値は20 ⇐ 貸出先数1千、デフォルト確率2%
    - シミュレーション回数：1万回、ケンドールのタウ=0.15



６．信用リスクへの応用

- デフォルト件数の分布
  - シミュレーション回数：10万回

デフォルト件数の分布（高相関＜0.15＞）

τ =0.15	平均	標準偏差	VaR(90%)	VaR(95%)	VaR(99%)	VaR(99.9%)
正規	19.9	29.8	51	75	144	261
t	19.8	51.9	55	106	270	518
ガンベル	20.2	63.0	27	50	251	981
クレイトン	20.0	60.7	51	112	319	613

デフォルト件数の分布（低相関＜0.02＞）

τ =0.02	平均	標準偏差	VaR(90%)	VaR(95%)	VaR(99%)	VaR(99.9%)
正規	20.0	9.9	33	38	51	67
t	19.8	38.3	59	94	191	318
ガンベル	20.1	24.0	25	29	59	349
クレイトン	20.0	17.5	42	54	84	129

正規コピュラではデフォルト件数のVaRを低めに推定！

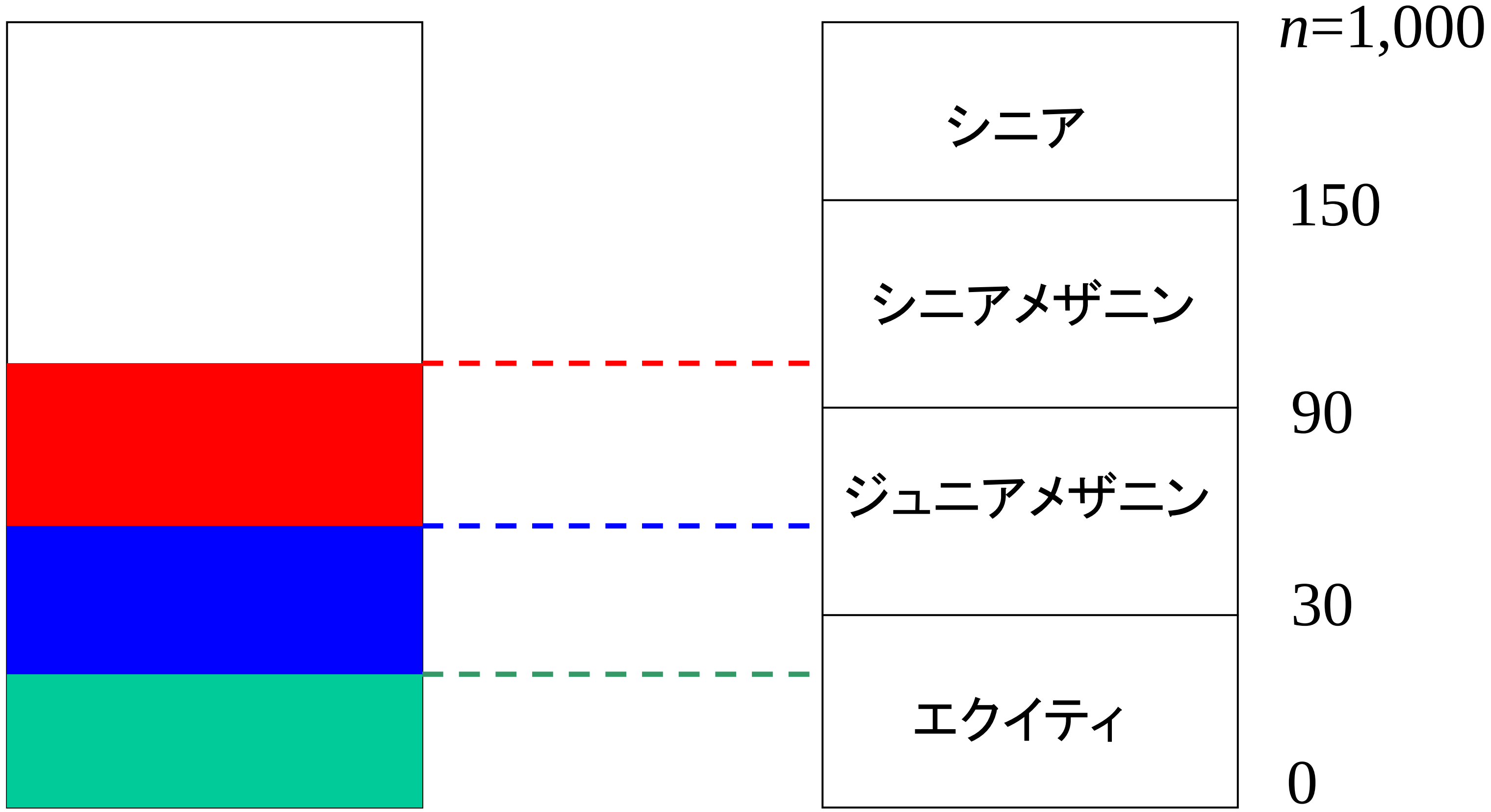
６．信用リスクへの応用

- 信用ポートフォリオの価値評価例
- CDO（Collateralized Debt Obligation）
  - 社債や貸出等から構成される信用ポートフォリオ（CDOプール）を原資産に持つ証券化商品
  - CDOプールの累積の損失率に応じて元本が毀損する商品に分解（トランチング）
  - 各トランシェを投資家に販売（累積の損失率がトランシェの下限値＜アタッチメント＞にタッチしない間はプレミアムが支払われる）

  - 価値評価の甘さが金融危機の一因となった！

６．信用リスクへの応用

- CDO**のトランチングと損益**
  - **プール（*n*個の債務）の累積損失**



６. 信用リスクへの応用

- CDO**の評価**
  - 累積損失率に応じて、各トランシェの元本毀損が決定
  - CDOプールの時点tでの累積損失の評価が問題
  - 各債務のデフォルト時刻の分布は別途わかるとし、満期でのn個の債務の状態変数の依存関係をコピュラで表現
    - ファクター・コピュラ・モデル
    - 標準的には正規コピュラが用いられる
  - CDOプールが等額、ゼロ回収率の債務の場合
    - 累積損失率の期待値⇔デフォルト件数の期待値評価
  - 評価例：n=1,000債務、各債務のデフォルト率2%、回収率ゼロ、元本1

６．信用リスクへの応用

- CDO各トランシェの期待損失率
  - ケンドールの τ =0.15、シミュレーション回数10万回

τ =0.15	エクイティ	ジュニアメザニン	シニアメザニン	シニア
正規	43.6%	9.0%	1.9%	0.04%
t	26.9%	9.8%	4.5%	0.36%
ガンベル	39.3%	4.3%	1.8%	0.41%
クレイトン	23.1%	9.6%	5.0%	0.58%

  - 正規コピュラならシニア債はほとんど毀損しないと評価されるが、他のコピュラではそうでもない！
  - シニア債の期待損失率は正規コピュラでは甘めの評価になる→適正なプレミアムが支払われていなかった可能性！

7. まとめ

- 様々なコピュラを紹介
- コピュラによりVaR等のリスク指標は大きく変化
  - 下側漸近独立の正規コピュラではリスクを過小評価する可能性
- CDOのトランシェの期待損失率にも大きな影響
  - 下側漸近独立の正規コピュラでは上位トランシェに適正なプレミアムが支払われていなかった可能性
- 順位相関とともに裾依存係数に注意を払ってコピュラを選択していくべき

参考文献

- 戸坂 凡展・吉羽 要直、「コピュラの金融実務での具体的な活用方法の解説」、『金融研究』、第24巻別冊第2号、日本銀行金融研究所、2005年、115～162頁

  http://www.imes.boj.or.jp/japanese/kinyu/2005/yoyaku/kk24-b2-3.html

- 渋谷　政昭・高橋　倫也、「極値理論、信頼性、リスク管理」、『21世紀の統計科学Ⅱ 自然・生物健康の統計科学』 第4章、2008年、89～124頁
- 塚原　英敦、「接合分布関数（コピュラ）の理論と応用」、『21世紀の統計科学Ⅲ 数理・計算の統計科学』 第5章、2008年、111～146頁
- 室町 幸雄、『信用リスク計測とCDOの価格付け』、朝倉書店、2007年

参考文献

- Bouyé, E., V. Durrleman, A. Nikeghbali, G. Riboulet, and T. Roncalli, "Copulas for Finance: A Reading Guide and Some Applications," Working Paper, Crédit Lyonnais, 2000.
- Burtschell, X., J. Gregory, and J.-P. Laurent, "A Comparative Analysis of CDO Pricing Models under the Factor Copula Framework," *Journal of Derivatives*, 16(4), 2009, pp.9–37.
- Cherubini, U., E. Luciano, and W. Vecchiato, *Copula Methods in Finance*, John Wiley & Sons, 2004.
- Embrechts, P., A. McNeil, and D. Straumann, "Correlation and Dependency in Risk Management: Properties and Pitfalls," in *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, Dempster, M. A. H. ed., Cambridge University Press, 2002, pp.176–223.
- Frees, E. W., and E. A. Valdez, "Understanding Relationships Using Copulas," *North American Actuarial Journal*, 2(1), 1998, pp.1–25.
- Joe, H., *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Chapman & Hall, 1997.
- Laurent, J-P. and J. Gregory, "Basket default swaps, CDOs and factor copulas," *Journal of Risk*, 7(4), 2005, pp.1–20.
- Nelsen, R. B., *An Introduction to Copulas*, Second ed., Springer, 2006.