

2009年10月19日ー21日 「疎グラフ上のダイナミクス」IBIS2009  
九州大学医学部 百年講堂 10月21日発表

# 疎結合位相振動子ネットワークの Cavity法による解析

奈良女子大学人間文化研究科  
上江洌 達也

J. P. L. Hatchett and T. Uezu, Phys. Rev. E **78** (2008) 036106

J. P. L. Hatchett and T. Uezu, J. Phys. Soc. Jpn., Vol. **78** (2009) 024001

# 内容

- I. Introduction
- II. モデル
- III. 平衡状態 (Cavity法の説明)
- IV. Dynamics
- V. まとめと課題など

# I. Introduction

## Motivation

### 免疫系

イディオタイプネットワーク: N. K. Jerne 1974

抗体を生産しうるリンパ球(B細胞)は刺激がないと死んでしまうが、体内には10の12乗もの免疫細胞が存在する。それを維持するメカニズムとして導入された。

イディオタイプ: 抗原を認識するための固有な立体構造

ある抗体のイディオタイプを認識する抗体がある→抗イディオタイプ抗体  
抗体どうしが相互作用してネットワークを形成

この説は、仮定がシンプルでわかりやすいため、一世を風靡したが、その後、免疫応答に関与する成分(T細胞など)が発見され、ネットワーク説にそれらを取り込むと理論が複雑になりすぎるため、注目を浴びなくなった。

## 第二世代免疫ネットワーク理論 F. Varela 1980年代

新生マウスなどで、抗原の侵入がないにもかかわらず、活性化されたリンパ球が維持されているという実験結果があり、ネットワーク説を支持する結果とも考えられる。Varelaは、T細胞(胸腺由来)の作用を考慮した、B細胞(骨髄由来)、抗体を構成要素とするネットワークの力学系モデルを提唱。数理モデルなので、理論解析が可能。

**Varela model** 
$$\frac{df_i}{dt} = -K_1\sigma_i f_i - K_2 f_i + K_3 Mat(\sigma_i) b_i$$

$$\frac{db_i}{dt} = -K_4 b_i + K_5 Prol(\sigma_i) b_i + K_6$$

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^N m_{ij} f_j$$

$f_i$  : 抗体濃度                       $b_i$  : B細胞濃度

$Prol(\sigma)$  : 増殖関数       $Mat(\sigma)$  : 成熟関数

$\sigma_i$  : 敏感性                       $m_{ij}$  : 親和力 (相互作用の強さ)

抗原とB細胞のクローンが結合し、T細胞の助けで、B細胞が成熟、分裂する。他の一部のB細胞は抗体を分泌する。抗体は、刺激物を中和し、中和が完了すると、T細胞の働きでB細胞の分裂が抑制され、免疫応答が終了する。

$$\frac{df_i}{dt} = -K_1 \overset{\text{中和}}{\sigma_i} f_i - K_2 \overset{\text{自然死}}{f_i} + K_3 \overset{\text{成熟したB細胞による分泌}}{Mat(\sigma_i) b_i}$$

$$\frac{db_i}{dt} = -K_4 \overset{\text{自然死}}{b_i} + K_5 \overset{\text{刺激による分裂}}{Prol(\sigma_i) b_i} + K_6 \overset{\text{骨髄からの供給}}{}$$

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^N m_{ij} f_j$$

$m_{ij}$  :  $j$  番目の抗体が  $i$  番目の抗体を識別する強さ

免疫系の特徴 : 1 のオーダーの  $j$  についてののみ、

$m_{ij}$  が 0 でない。 → 疎結合系 !

我々は、統計力学的手法でこの問題を解析した。

手法: 動的レプリカ法(Dynamical Replica Theory, DRT)

B細胞、抗体、感受性の同時分布関数の従う偏微分方程式を導出し  
しかしながら、ネットワークのユニットが**2変数の常微分方程式系**  
→ 詳細な解析が困難。

研究対象として、位置づけると、

動的素子からなるネットワークで、相互作用する相手の個数が有限(疎結合系)

解析的扱いが可能な動的素子で、この問題を扱いたい。

→ 位相振動子系

Kuramoto モデル: 位相振動子系

→ 先行研究あり、解析が容易。

Y. Kuramoto, Chemical Waves, Oscillations and Turbulence (Springer, Berlin, 1984)

H. Daido, Prog. Theor. Phys. 77 (1987), 622.

H. Daido, Phys. Rev. Lett. 68 (1992), 1073.

H. Daido, Phys. Rev. E61, (2000) 2145.

## II. モデル

### 位相振動子系

位相  $\psi_i : i = 1, 2, \dots, N$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \omega_i + \sum_j J_{ij} \sin(\psi_j - \psi_i) - h \sin(\psi_i) + \xi_i(t)$$

$\xi_i(t)$ : Gaussian white noise

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi_i(t) \xi_i(t') \rangle = 2T \delta(t - t')$$

$J_{ij} = J_{ji}$  とする。また、 $h = 0$  とする。

$\omega_i = \omega$  のとき一般的に  $\omega_i = 0$  とおける。

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \sum_j J_{ij} \sin(\psi_j - \psi_i) + \xi_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial \psi_i} + \xi_i(t),$$

$$H = -\sum_{i<j} J_{ij} \cos(\psi_i - \psi_j)$$

時刻  $t$  おいて系が  $\vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)$  の状態にある  
確率  $p_t(\vec{\psi})$  の従う **フォッカー-プランク方程式**

$$\frac{\partial p_t(\vec{\psi})}{\partial t} = \sum_j \frac{\partial}{\partial \psi_j} \left\{ \frac{\partial H}{\partial \psi_j} p_t(\vec{\psi}) \right\} + T \sum_j \frac{\partial^2}{\partial \psi_j^2} p_t(\vec{\psi})$$

**平衡状態**

$$p_{eq}(\vec{\psi}) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{H}{T}\right) = \frac{1}{Z} \exp(-\beta H), \quad \beta = T^{-1}$$



# オーダーパラメーター

$$m_c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos(\psi_i),$$

$$m_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sin(\psi_i),$$

$$m = \sqrt{m_c^2 + m_s^2}.$$

一般性を失わずに  $m_s = 0$   
とおける。

# 疎結合系

相互作用する相手の数を  $c$  個とする。

$c$  は  $N$  に依存しない  $O(1)$  の量。

次の2つの場合について、平衡状態とダイナミクスを扱う。

## (1) ベーテ ラティス

$$\sum_{j(\neq i)} J_{ij} = cJ \quad \forall i, \quad J_{ij} = J_{ji}, \quad J_{ij} \in \{0, J\}$$

## (2) スパースランダムネットワーク

$$P(J_{ij}) = \left(1 - \frac{c}{N}\right) \delta(J_{ij}) + \frac{c}{N} \delta(J_{ij} - J)$$

# III. 平衡状態

## ハミルトニアン

$$H = -\sum_{i<j} J_{ij} \cos(\psi_i - \psi_j)$$

平衡状態

$$p_{eq}(\vec{\psi}) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{H}{T}\right) = \frac{1}{Z} \exp(-\beta H), \quad \beta = T^{-1},$$

$$Z = \int [\prod_i d\psi_i] \exp(-\beta H)$$

Cavity法を用いて位相分布関数を計算する。

以下では、位相振動子系の言葉で説明するが、計算したい関数(分布関数、変分関数や尤度関数)が系の変数で具体的に表わされている場合も同様である。

# Cavity method

N. S. Skantzos et.al., Phys. Rev. E72 (2005),066127.

$\partial i$  :  $i$ 番目の振動子と直接相互作用する振動子の集合

$P_{\partial i}^{(i)}(\vec{\psi}_{\partial i})$  :

$i$ 番目の振動子を除いたときに、その近傍  $\partial i$  の振動子群の位相の同時確率密度

$P_j^{(i)}(\psi_j)$  :  $i$ 番目の振動子を除いたとき、その近傍にある  $j$ 番目の振動子の位相  $\psi_j$ の分布密度

# 位相分布密度の計算

$P_{\partial i}^{(i)}(\vec{\psi}_{\partial i})$  : **Cavity field**

$$H^{(i)} = - \overline{\sum_{l < k}} J_{lk} \cos(\psi_l - \psi_k)$$

$\overline{\sum}$  は  $i$  を除いた和

$$P_{\partial i}^{(i)}(\vec{\psi}_{\partial i}) = \frac{1}{Z_{\partial i}^{(i)}} \int [\prod_{l(l \neq i, l \notin \partial i)} d\psi_l] \exp[-\beta H^{(i)}]$$

$$= \frac{1}{Z_{\partial i}^{(i)}} \int [\prod_{l(l \neq i, l \notin \partial i)} d\psi_l]$$

$$\times \exp[\beta \sum_{k < l (k \neq i, l \neq i)} J_{kl} \cos(\psi_k - \psi_l)]$$

$P_j^{(i)}(\psi_j)$  : **Cavity field**

$$H^{(i)} = - \overline{\sum_{l < k} J_{lk} \cos(\psi_l - \psi_k)}$$

$\overline{\sum}$  は  $i$  を除いた和

$$P_j^{(i)}(\psi_j) = \frac{1}{Z_j^{(i)}} \int [\prod_{l(\neq i, j)} d\psi_l] \exp[-\beta H^{(i)}]$$

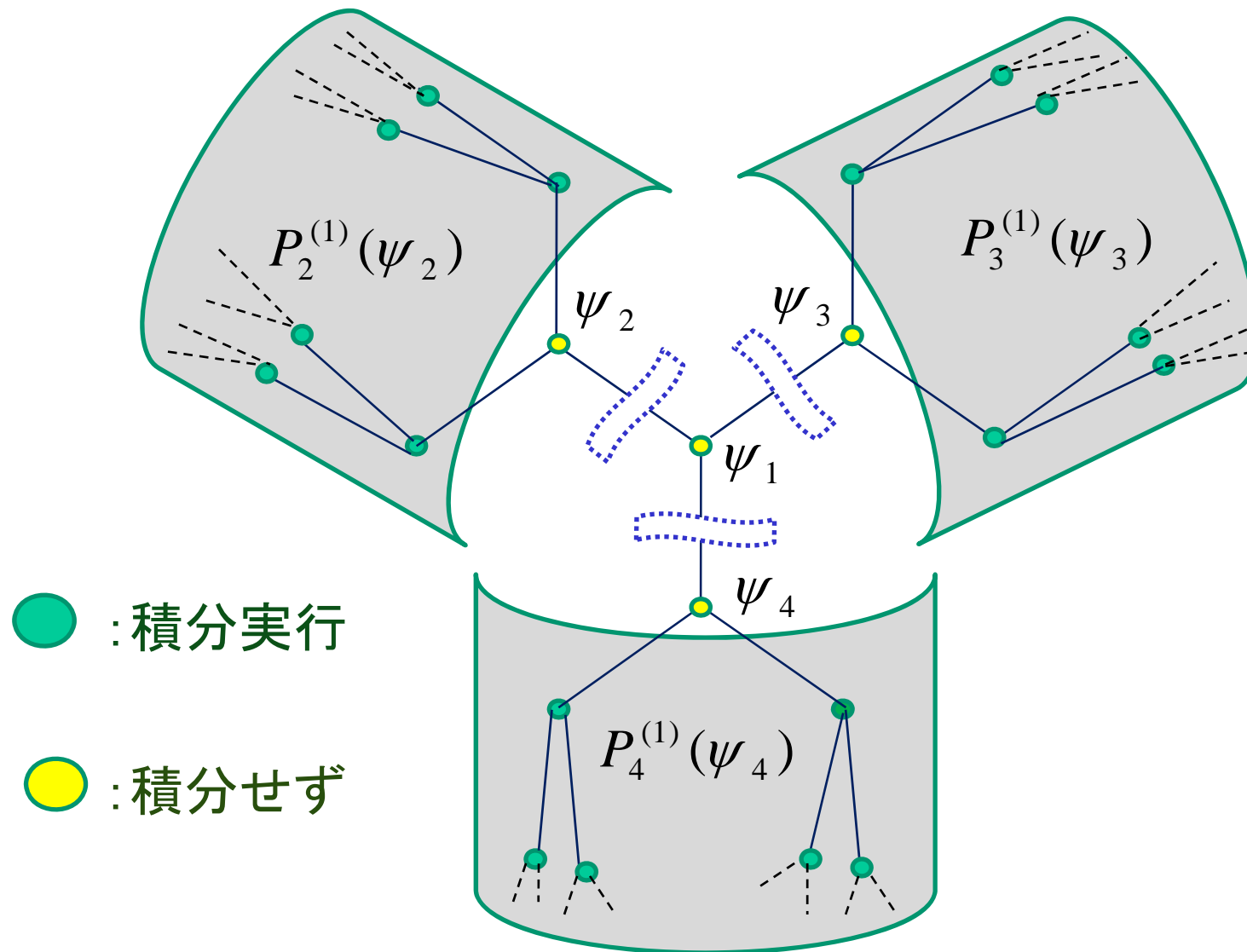
$$= \frac{1}{Z_j^{(i)}} \int [\prod_{l(\neq i, j)} d\psi_l]$$

$$\times \exp[\beta \sum_{k < l (k \neq i, l \neq i)} J_{kl} \cos(\psi_k - \psi_l)]$$

$P_i(\psi_i)$  :  $i$  番目の振動子の位相分布密度、  
**Marginal distribution**

$$\begin{aligned} P_i(\psi_i) &= \frac{1}{Z} \int [\prod_{l(\neq i)} d\psi_l] \exp[-\beta H] \\ &= \frac{1}{Z} \int [\prod_{l(\neq i)} d\psi_l] \\ &\quad \times \exp[\beta \sum_{k < l} J_{kl} \cos(\psi_k - \psi_l)] \end{aligned}$$

# ベーテラティス



$$P_{(2,3,4)}^{(1)}(\psi_2, \psi_3, \psi_4) = P_2^{(1)}(\psi_2) P_3^{(1)}(\psi_3) P_4^{(1)}(\psi_4)$$

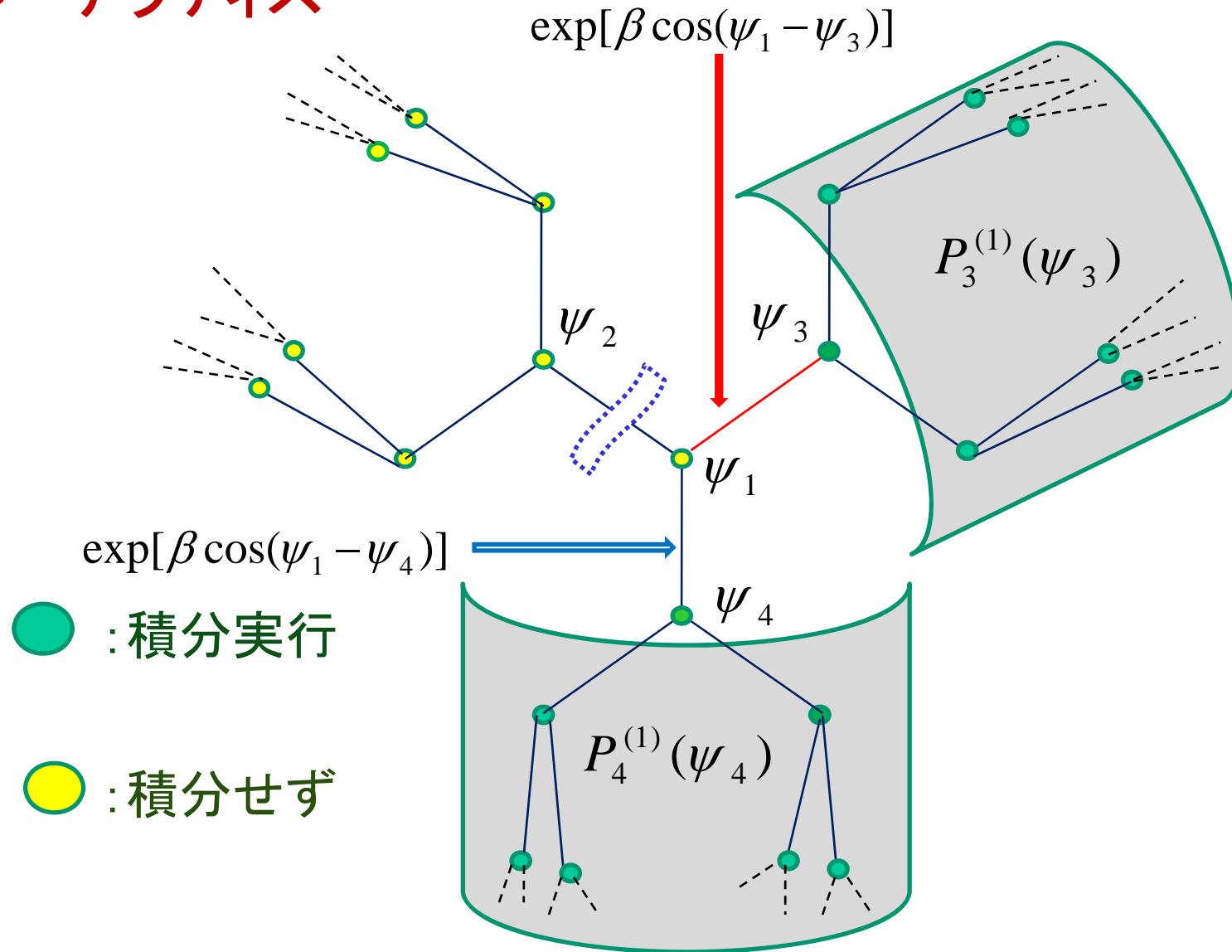


# 位相分布密度の計算

## ベーテラティス

$$\begin{aligned} P_{\partial i}^{(i)}(\vec{\psi}_{\partial i}) &= \frac{1}{Z_{\partial i}^{(i)}} \int [\prod_{l(l \neq i, l \notin \partial i)} d\psi_l] \\ &\quad \times \exp[\beta \sum_{k < l (k \neq i, l \neq i)} J_{kl} \cos(\psi_k - \psi_l)] \\ &= \prod_{l \in \partial i} P_l^{(i)}(\psi_l) \end{aligned}$$

# ベーテラティス



$$P_1^{(2)}(\psi_1) = \frac{1}{Z_1^{(2)}} \int d\psi_3 d\psi_4 \exp[\beta \cos(\psi_1 - \psi_3)] P_3^{(1)}(\psi_3) \exp[\beta \cos(\psi_1 - \psi_4)] P_4^{(1)}(\psi_4)$$

# 位相分布密度の計算

## ベーテラテイス

$$P_i^{(j)}(\psi_i) = \frac{1}{Z_i^{(j)}} \int [\prod_{l(\neq i, j)} d\psi_l]$$

$$\times \exp[\beta \sum_{k < l (k \neq j, l \neq j)} J_{kl} \cos(\psi_k - \psi_l)]$$

$$= \frac{1}{Z_i^{(j)}} \int [\prod_{l \in \partial i / j} d\psi_l]$$

$$\times \exp[\beta \sum_{l \in \partial i / j} J_{il} \cos(\psi_l - \psi_i)] \underbrace{P_{\partial i / j}^{(i)}(\vec{\psi}_{\partial i / j})}$$



$$\prod_{l \in \partial i / j} P_l^{(i)}(\psi_l)$$

# 一般の疎結合系における近似

$$P_{\partial i}^{(i)}(\vec{\psi}_{\partial i}) \cong \prod_{l \in \partial i} P_l^{(i)}(\psi_l),$$

$$P_{\partial i \setminus j}^{(i)}(\vec{\psi}_{\partial i \setminus j}) \cong \prod_{l \in \partial i \setminus j} P_l^{(i)}(\psi_l).$$

ベーテ ラティスの場合は、厳密に成り立つ。

## Self – consistent equations

$$\begin{aligned} P_i^{(j)}(\psi_i) &= \frac{1}{Z_i^{(j)}} \int d\vec{\psi}_{\partial i \setminus j} \exp[\beta \sum_{l \in \partial i \setminus j} \cos(\psi_i - \psi_l)] P_{\partial i \setminus j}^{(i)}(\vec{\psi}_{\partial i \setminus j}) \\ &= \frac{1}{Z_i^{(j)}} \int d\vec{\psi}_{\partial i \setminus j} \exp[\beta \sum_{l \in \partial i \setminus j} \cos(\psi_i - \psi_l)] \prod_{l \in \partial i \setminus j} P_l^{(i)}(\psi_l) \end{aligned}$$

これを満たす解を求めれば、全ての量が計算できる！  
例えば、marginal distribution は、次式で与えられる。

$P_i(\psi_i)$  :  $i$  番目の振動子の位相分布密度

$$P_i(\psi_i) = \frac{1}{Z_i} \int d\vec{\psi}_{\partial i} \exp[\beta \sum_{l \in \partial i} \cos(\psi_i - \psi_l)] \prod_{l \in \partial i} P_l^{(i)}(\psi_l)$$

# 反復法による解法

$\{P_{i,t}^{(j)}(\psi_i)\}$  より、 $\{P_{i,t+1}^{(j)}(\psi_i)\}$  を計算し、  
収束するまで反復する。

$$P_{i,t+1}^{(j)}(\psi_i) = \frac{1}{Z_{i,t}^{(j)}} \int d\vec{\psi}_{\partial i \setminus j} \exp[\beta \sum_{l \in \partial i \setminus j} \cos(\psi_i - \psi_l)] \prod_{l \in \partial i \setminus j} P_{l,t}^{(i)}(\psi_l)$$

ベーテラティスの場合は、ループが無いので厳密。

→ 信念伝搬法と等価。

スパースランダムネットワークの場合、ループがあり得るが、システムサイズ  $N$  が十分大きければループは無視できる。

→ ループ有り信念伝搬法に対応。

## (1) ベーテ ラティス

分布の一様性を仮定する。

$$P_i^{(j)}(\psi) = P^{cav}(\psi) \quad P_i(\psi) = P^{true}(\psi)$$

### Self – consistent equation

$$P^{cav}(\psi) = \frac{1}{Z_{cav}} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} d\psi' e^{\beta \cos(\psi - \psi')} P^{cav}(\psi') \right]^{c-1}$$

反復法で解く。

$$P_{t+1}^{cav}(\psi) = \frac{1}{Z_{cav}} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} d\psi' e^{\beta \cos(\psi - \psi')} P_t^{cav}(\psi') \right]^{c-1}$$

## Marginal distribution

$$P^{true}(\psi) = \frac{1}{Z_{true}} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} d\psi' e^{\beta \cos(\psi - \psi')} P^{cav}(\psi') \right]^c$$

オーダーパラメータ  $m_c, m_s, m = \sqrt{m_c^2 + m_s^2}$

$$m_c = \int_0^{2\pi} d\psi P^{true}(\psi) \cos(\psi), \quad m_s = \int_0^{2\pi} d\psi P^{true}(\psi) \sin(\psi),$$

相転移

$m = 0$  : パラ相       $m > 0$  : フェロ相

$$c = 1 + \frac{I_0(\beta J)}{I_1(\beta J)} \quad I_n(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \cos(n\phi) e^{z \cos(\phi)}$$



## (2) スパースランダムネットワーク

$$P(J_{ij}) = \left(1 - \frac{c}{N}\right) \delta(J_{ij}) + \frac{c}{N} \delta(J_{ij} - J)$$

レプリカ法では、オーダーパラメータは、関数になり、  
自由エネルギーは、オーダーパラメータの汎関数になる。

Finitely connected vector spin systems with random matrix interactions  
A.C. C. Coolen et.al., J. of Phys. A: Math. Gen. **38**(2005)8289

相転移点（レプリカ法）

パラ(P)相からフェロ(F)相への相転移線

$$c = \frac{I_0(\beta J)}{I_1(\beta J)}$$

$$I_n(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \cos(n\phi) e^{z \cos(\phi)}$$

modified Bessel function

## Cavity 法

すべてのサイトとその近傍を考える。

**Cavity field** をパラメータ表示する。(フーリエ展開)

$$P_i(\psi_i | \vec{a}_i, \vec{b}_i) \cong C_i \exp\left[\sum_{n=1}^{n_M} (a_{i,n} \cos(n\psi_i) + b_{i,n} \sin(n\psi_i))\right]$$

$$P_i^{(j)}(\psi_i | \vec{a}_i^{(j)}, \vec{b}_i^{(j)}) \cong C_i^{(j)} \exp\left[\sum_{n=1}^{n_M} (a_{i,n}^{(j)} \cos(n\psi_i) + b_{i,n}^{(j)} \sin(n\psi_i))\right]$$

$$\vec{a}_i^{(j)} = (a_{i,1}^{(j)}, a_{i,2}^{(j)}, \dots, a_{i,n_M}^{(j)}), \quad \vec{b}_i^{(j)} = (b_{i,1}^{(j)}, b_{i,2}^{(j)}, \dots, b_{i,n_M}^{(j)}).$$

$$\vec{a}_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n_M}), \quad \vec{b}_i = (b_{i,1}, b_{i,2}, \dots, b_{i,n_M}),$$

## Recursion relations for $\vec{a}_i^{(j)}$ and $\vec{b}_i^{(j)}$

$$a_{i,m}^{(j)} = \sum_{l \in \partial i \setminus j} u_{i,m}^{(l)}, \quad b_{i,m}^{(j)} = \sum_{l \in \partial i \setminus j} v_{i,m}^{(l)}, \quad m > 0.$$

$$u_{i,m}^{(l)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\pi} \cos(m\phi) \times \ln \left( \int_0^{2\pi} d\phi' \exp[\beta J \cos(\phi - \phi')] + \sum_{n=1}^{n_M} \left( a_{i,n}^{(j)} \cos(n\psi_i) + b_{i,n}^{(j)} \sin(n\psi_i) \right) \right)$$

$$v_{i,m}^{(l)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\pi} \sin(m\phi) \times \ln \left( \int_0^{2\pi} d\phi' \exp[\beta J \cos(\phi - \phi')] + \sum_{n=1}^{n_M} \left( a_{i,n}^{(j)} \cos(n\psi_i) + b_{i,n}^{(j)} \sin(n\psi_i) \right) \right)$$

反復法で解く。

## Determination of $\vec{a}_i$ and $\vec{b}_i$

$$a_{i,m} = \sum_{l \in \partial i} u_{i,m}^{(l)}, \quad b_{i,m} = \sum_{l \in \partial i} v_{i,m}^{(l)}, \quad m > 0.$$

数値計算を行うと、 $n_M = 3$  で十分。すなわち、フーリエモード6個で十分。

オーダーパラメータは、 $P_i(\psi_i)$  と  $P_i^{(j)}(\psi_j)$  で次のように表わされる。

$$m_c = \frac{1}{N} \sum_i \int_0^{2\pi} d\psi P_i(\psi) \cos(\psi), \quad m_s = \frac{1}{N} \sum_i \int_0^{2\pi} d\psi P_i(\psi) \sin(\psi),$$
$$e = \frac{1}{2N} \sum_i \sum_{j \in \partial i} \frac{\int d\psi_i d\psi_j P_i^{(j)}(\psi_i) P_j^{(i)}(\psi_j) e^{\beta J \cos(\psi_i - \psi_j)} \cos(\psi_i - \psi_j)}{\int d\psi_i d\psi_j P_i^{(j)}(\psi_i) P_j^{(i)}(\psi_j) e^{\beta J \cos(\psi_i - \psi_j)}}$$
$$\equiv \frac{1}{2} \langle \cos(\psi_i - \psi_j) \rangle_2.$$

# 理論結果と数値シミュレーション

## A. 3つのモデルの相転移と オーダーパラメータの温度依存性

スパースランダムモデル (レプリカ法)

ベータラティス (Cavity法)

全結合モデル (レプリカ法)

$$J_{ij} = J \left( \frac{c}{N} + \sqrt{\frac{c}{N}} z_{ij} \right)$$

$z_{ij} = z_{ji}$  : 平均0、分散1のガウス分布に従う

## B. スパースランダムモデル

Cavity法とレプリカ法の比較

# A. 3つのモデルの相転移と オーダーパラメータの 温度依存性

スパースランダムモデル(レプリカ法)

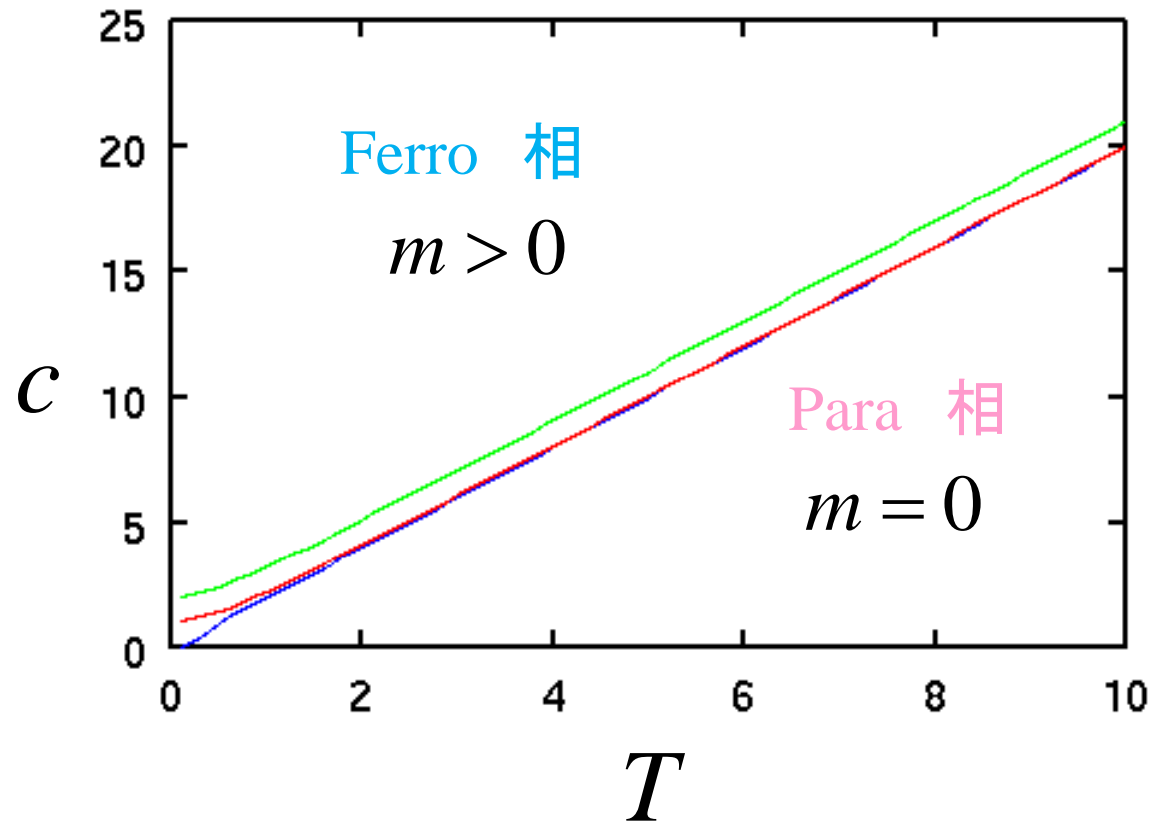
ベータラティス(Cavity法)

全結合モデル(レプリカ法)



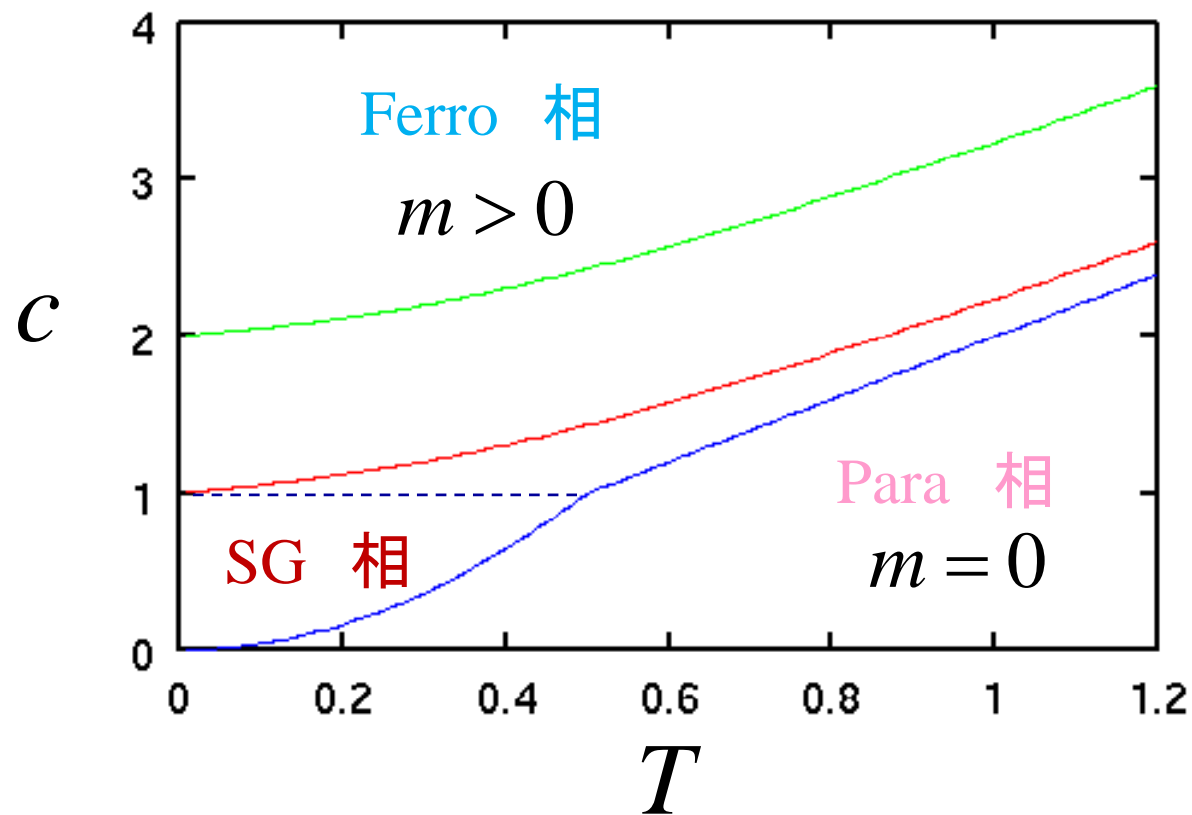
# T-c平面での相図

赤: スパースモデル(レプリカ法)    青: 全結合モデル(レプリカ法)  
黄緑: ベーテラティス(Cavity法)



# T-c平面での相図(拡大図)

赤: スパースモデル(レプリカ法)    青: 全結合モデル(レプリカ法)  
黄緑: ベーテラティス(Cavity法)

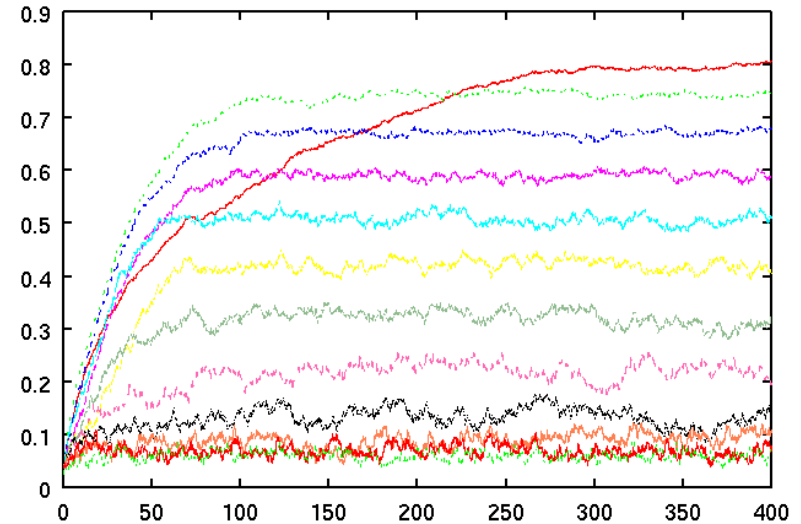


# 数値計算

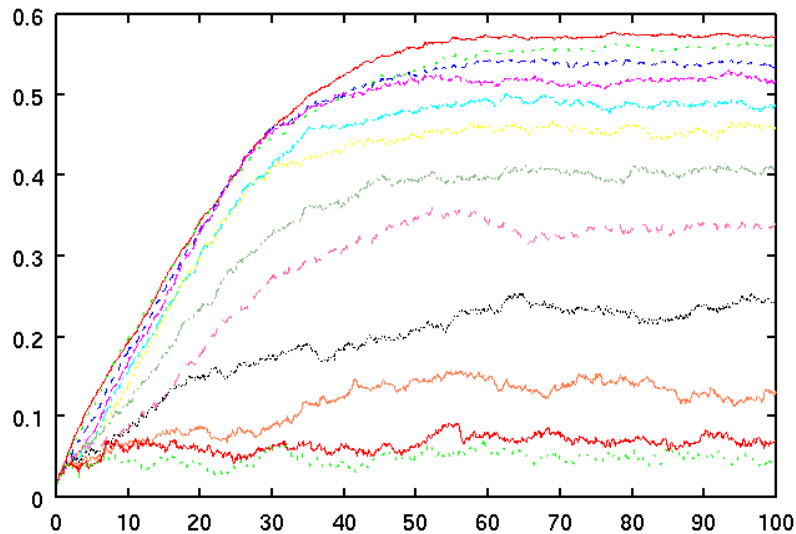
オーダーパラメーター  $m$   
の時系列  $c = 2, 3$

シミュレーション。Langevin eq.  
( $N = 2000$ )  
サンプル数 10

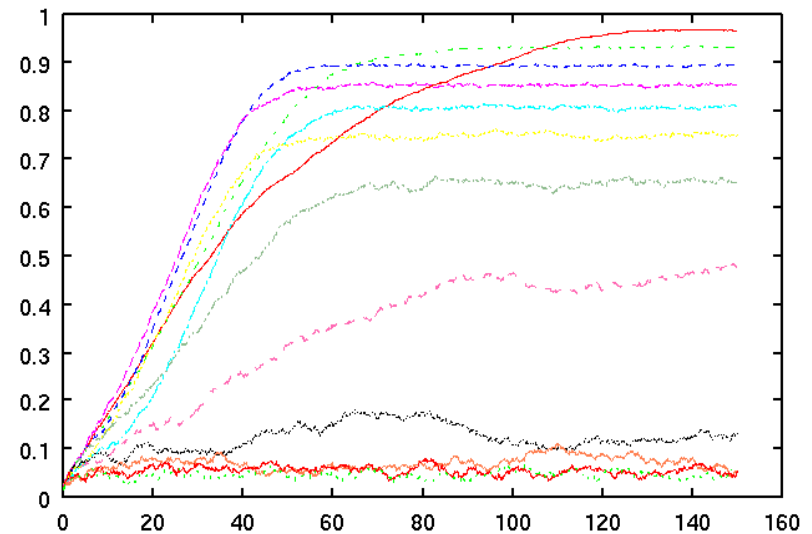
スパースモデル ( $N = 1000$ )



全結合モデル



ベータ ラティス



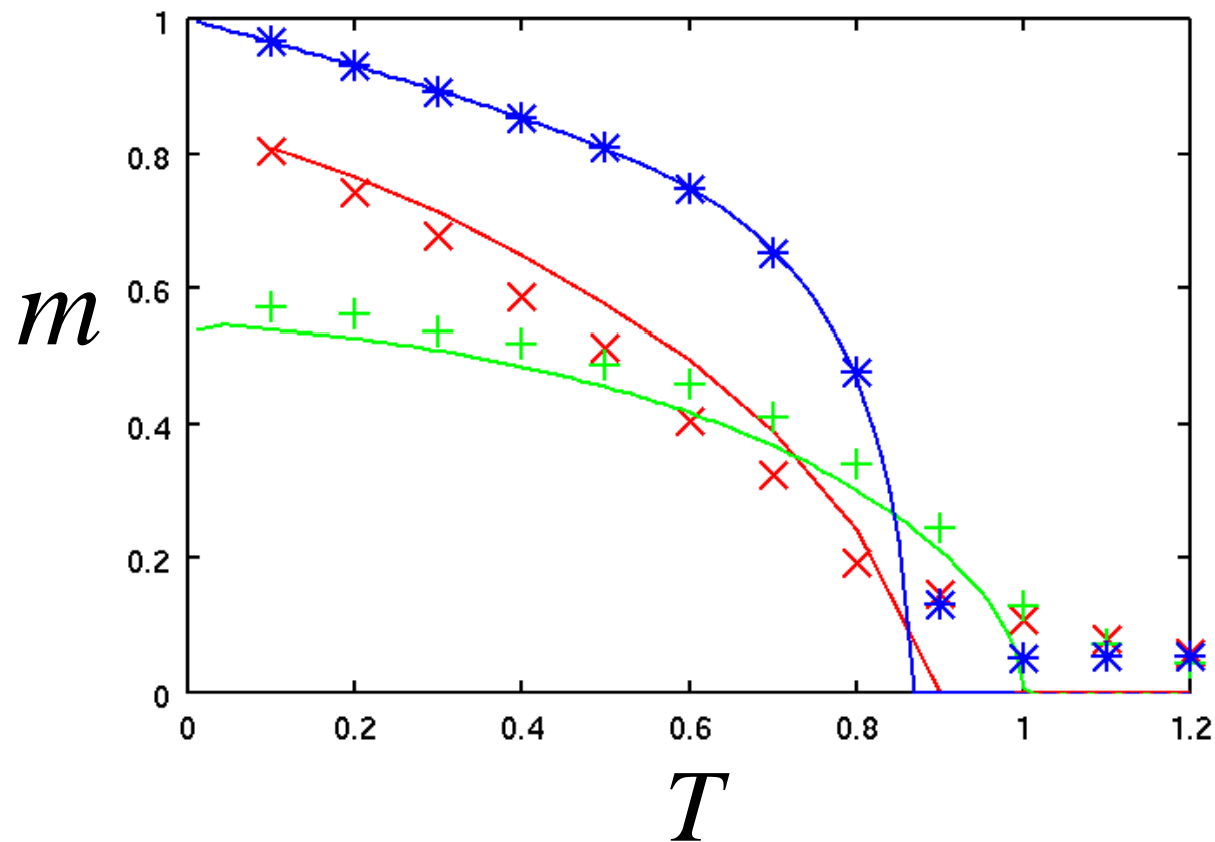
# 理論とシミュレーションの比較

オーダーパラメーター  $m$  の温度依存性  $c = 2, 3$

赤: スパースモデル 黄緑: 全結合モデル 青: ベーテ ラティス

実線: 理論結果

記号: シミュレーション。Langevin eq. ( $N = 2000$ ) サンプル数 10



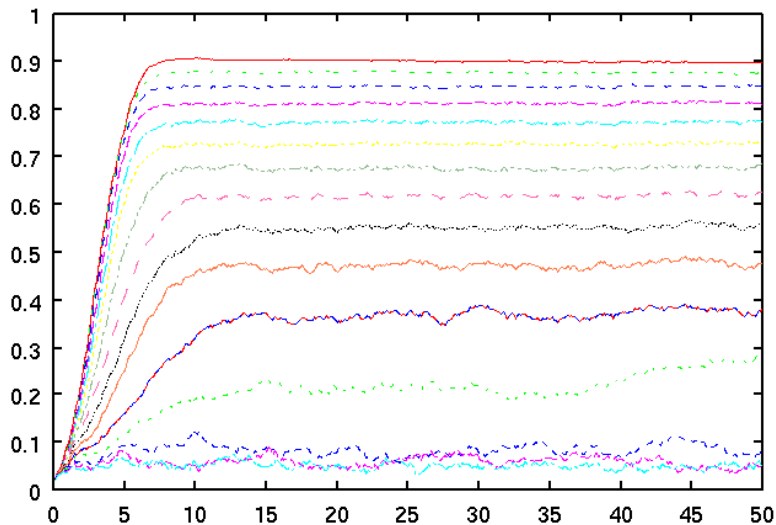
# 数値計算

オーダーパラメーター  $m$   
の時系列  $c = 5, 6$

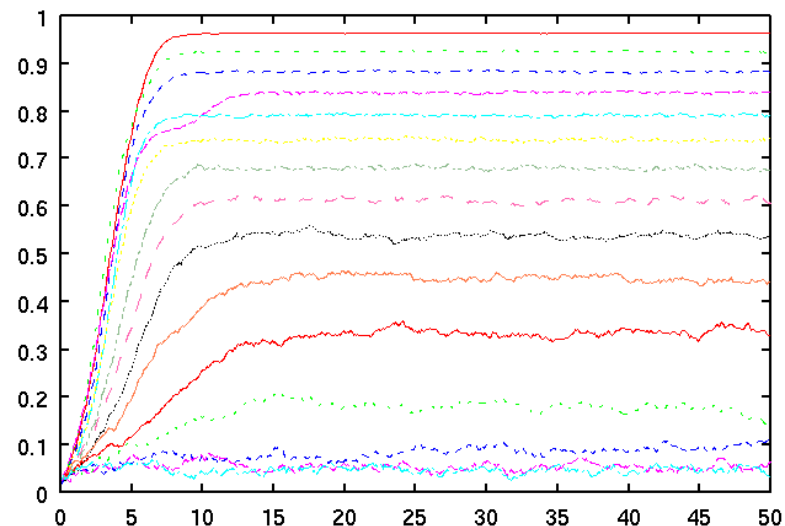
シミュレーション。Langevin eq.  
( $N = 2000$ )

サンプル数 10

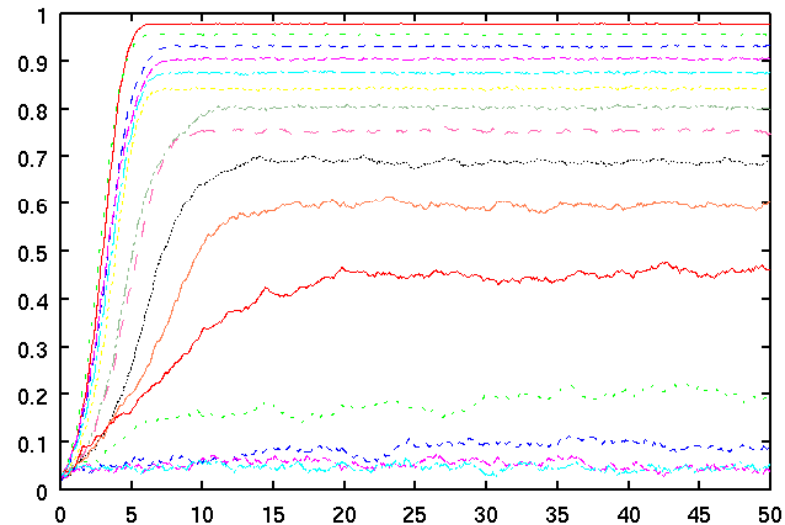
全結合モデル



スパースモデル



ベータ ラティス



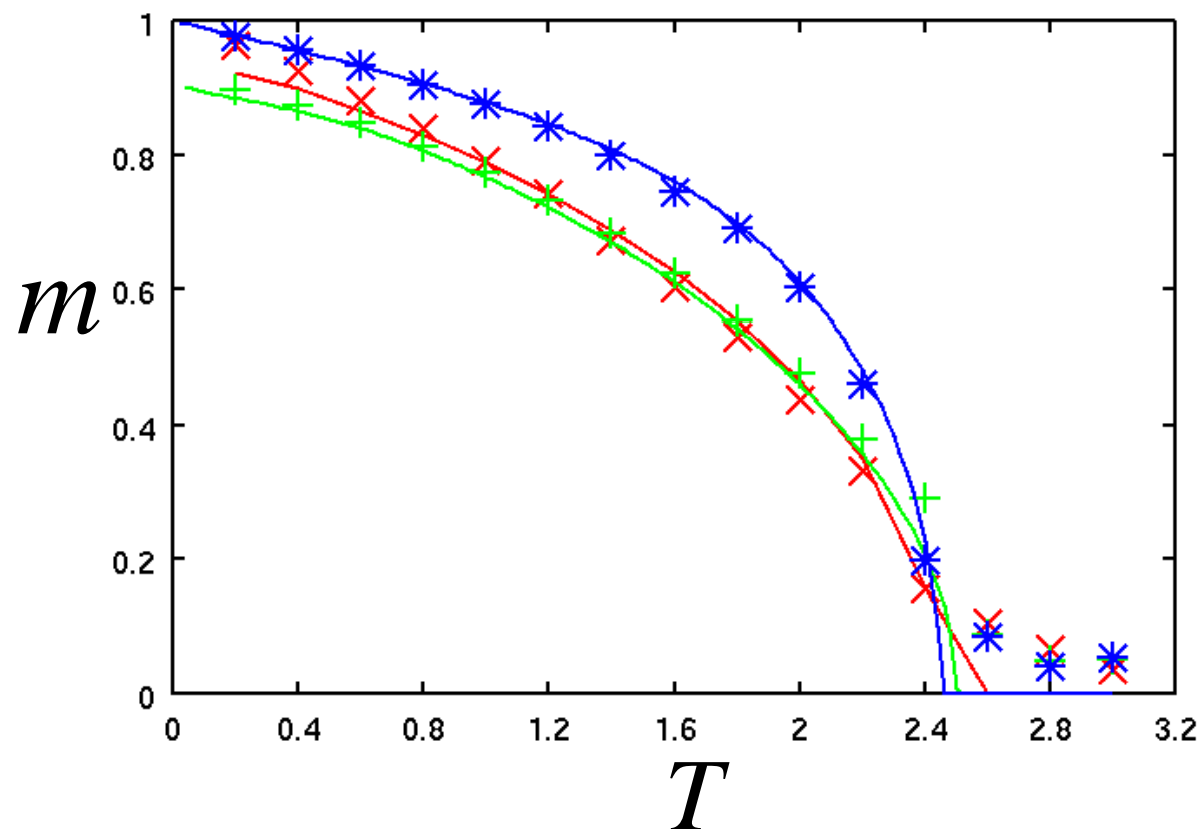
# 理論とシミュレーションの比較

オーダーパラメーター  $m$  の温度依存性  $c = 5, 6$

赤: スパースモデル 黄緑: 全結合モデル 青: ベーテ ラティス

実線: 理論結果

記号: シミュレーション。Langevin eq. ( $N = 2000$ ) サンプル数 10



## B. スパースランダムモデル

Cavity法とレプリカ法の比較

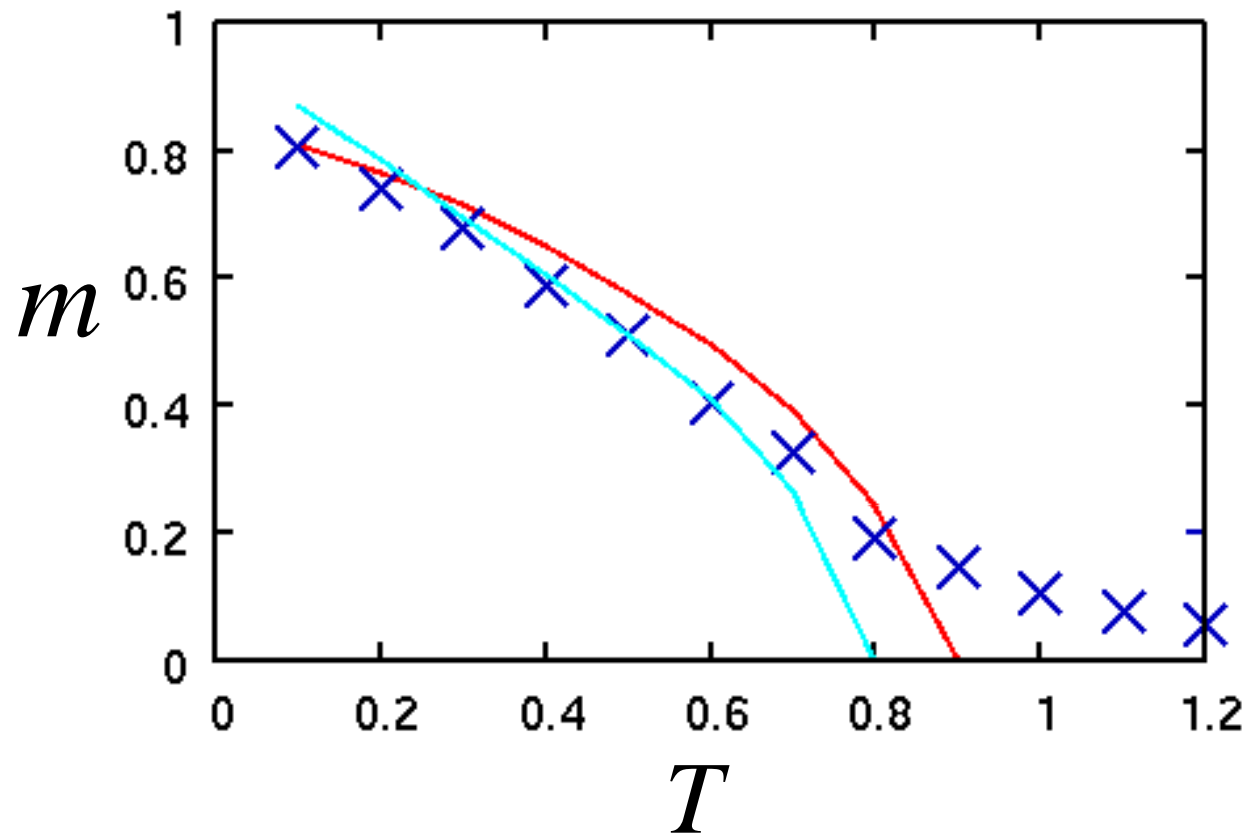
# 数値結果

オーダーパラメーター  $m$  の温度依存性  $c = 2$

赤: レプリカ法のポピュレーションダイナミクスによる方法 ( $N = 1000$ )

水色: Cavity法 ( $N = 100, n_M = 3, |m - m_{old}| < 10^{-4}$ )

記号: シミュレーション。Langevin eq. ( $N = 1000$ )





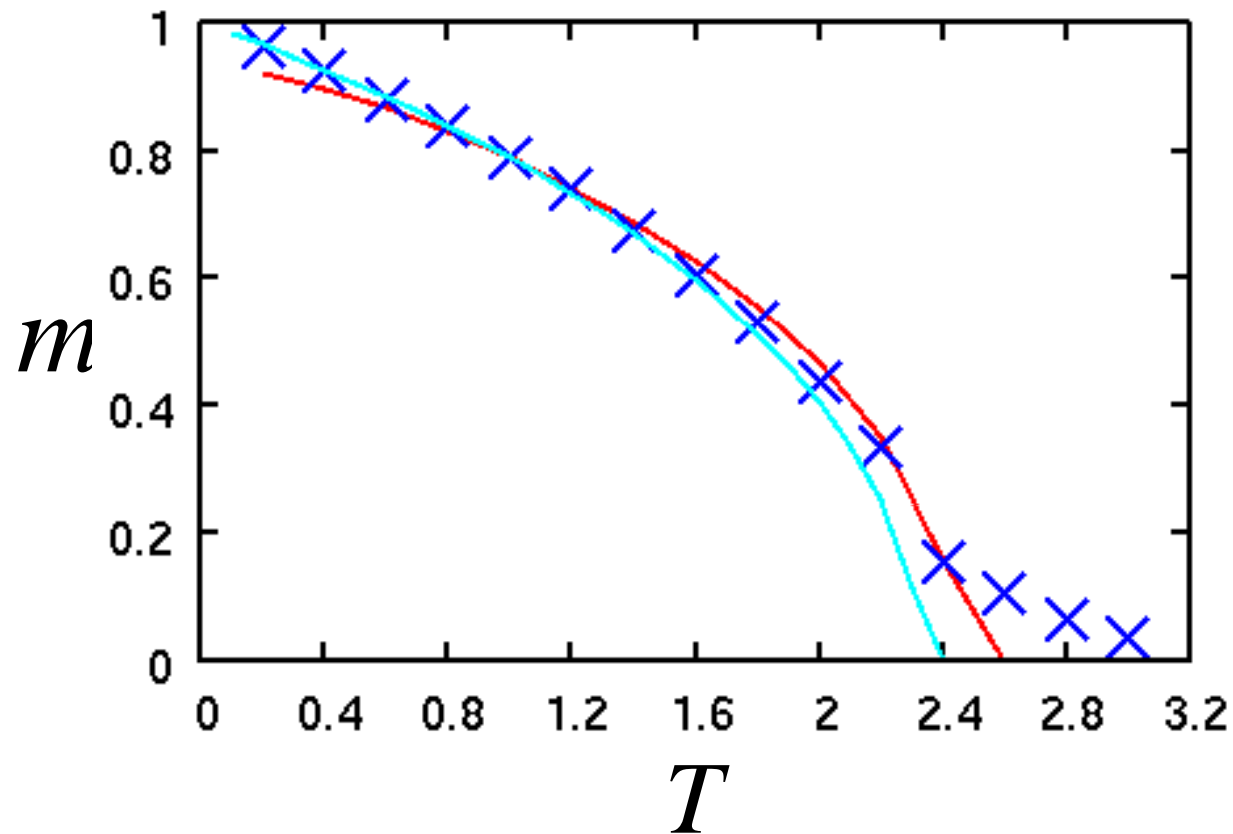
# 数値結果

オーダーパラメーター  $m$  の温度依存性  $c = 5$

赤: レプリカ法のポピュレーションダイナミクスによる方法 ( $N = 10000$ )

水色: Cavity法 ( $N = 100, n_M = 3, |m - m_{old}| < 10^{-4}$ )

記号: シミュレーション。Langevin eq. ( $N = 2000$ )



# IV. Dynamics

## ハミルトニアン

$$H = -\sum_{i<j} J_{ij} \cos(\psi_i - \psi_j)$$

時刻  $t$  において系が  $\vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)$  の状態にある確率  $p_t(\vec{\psi})$  の従う **フォッカー-プランク方程式**

$$\frac{\partial p_t(\vec{\psi})}{\partial t} = \sum_j \frac{\partial}{\partial \psi_j} \left\{ \frac{\partial H}{\partial \psi_j} p_t(\vec{\psi}) \right\} + T \sum_j \frac{\partial^2}{\partial \psi_j^2} p_t(\vec{\psi})$$

## 巨視的観測量のセットとその分布関数

$$\vec{\bar{\Omega}}(\vec{\psi}) = (\Omega_1(\vec{\psi}), \dots, \Omega_k(\vec{\psi}))$$

$$p_t(\vec{\bar{\Omega}}) = \int d\psi p_t(\vec{\psi}) \delta[\vec{\bar{\Omega}} - \vec{\bar{\Omega}}(\vec{\psi})]$$

$p_t(\vec{\bar{\Omega}})$  の従う **フォッカー-プラנק方程式**

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} p_t(\bar{\Omega}) &= \int d\bar{\psi} \frac{d}{dt} p_t(\bar{\psi}) \delta[\bar{\Omega} - \bar{\Omega}(\bar{\psi})] \\
&= \int d\bar{\psi} \left[ -\sum_i \frac{\partial}{\partial \psi_i} \left\{ p_t(\bar{\psi}) \sum_j J_{ij} \sin(\psi_j - \psi_i) \right\} + \sum_i T \frac{\partial^2}{\partial \psi_i^2} p_t(\bar{\psi}) \right] \delta[\bar{\Omega} - \bar{\Omega}(\bar{\psi})] \\
&= \int d\bar{\psi} \left[ \sum_i \left\{ p_t(\bar{\psi}) \left( \sum_j J_{ij} \sin(\psi_j - \psi_i) \right) \right\} \frac{\partial}{\partial \psi_i} + \sum_i T p_t(\bar{\psi}) \frac{\partial^2}{\partial \psi_i^2} \right] \delta[\bar{\Omega} - \bar{\Omega}(\bar{\psi})]
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi_i} \delta[\bar{\Omega} - \bar{\Omega}(\bar{\psi})] = \sum_{\mu} \frac{\partial \Omega_{\mu}}{\partial \psi_i}(\bar{\psi}) \frac{\partial}{\partial \Omega_{\mu}} \delta[\bar{\Omega} - \bar{\Omega}(\bar{\psi})]$$

$$= -\sum_{\mu} \frac{\partial \Omega_{\mu}}{\partial \psi_i}(\bar{\psi}) \frac{\partial}{\partial \Omega_{\mu}} \delta[\bar{\Omega} - \bar{\Omega}(\bar{\psi})]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \psi_i^2} \delta[\bar{\Omega} - \bar{\Omega}(\bar{\psi})] = -\sum_{\mu} \frac{\partial^2 \Omega_{\mu}}{\partial \psi_i^2}(\bar{\psi}) \frac{\partial}{\partial \Omega_{\mu}} [\bar{\Omega} - \bar{\Omega}(\bar{\psi})]$$

$$+ \sum_{\mu} \frac{\partial \Omega_{\mu}}{\partial \psi_i}(\bar{\psi}) \frac{\partial}{\partial \Omega_{\mu}} \sum_{\nu} \frac{\partial \Omega_{\nu}}{\partial \psi_i}(\bar{\psi}) \frac{\partial}{\partial \Omega_{\nu}} \delta[\bar{\Omega} - \bar{\Omega}(\bar{\psi})]$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} p_t(\bar{\Omega}) &= \int d\bar{\psi} \left[ - \sum_i \left\{ p_t(\bar{\psi}) \sum_j J_{ij} \sin(\psi_j - \psi_i) \right\} \sum_\mu \frac{\partial \Omega_\mu}{\partial \psi_i}(\bar{\psi}) \frac{\partial}{\partial \Omega_\mu} \right. \\
&\quad - T \sum_i p_t(\bar{\psi}) \sum_\mu \frac{\partial^2 \Omega_\mu}{\partial \psi_i^2}(\bar{\psi}) \frac{\partial}{\partial \Omega_\mu} \\
&\quad \left. + T \sum_i p_t(\bar{\psi}) \sum_{\mu, \nu} \frac{\partial \Omega_\mu}{\partial \psi_i}(\bar{\psi}) \frac{\partial \Omega_\nu}{\partial \psi_i}(\bar{\psi}) \frac{\partial}{\partial \Omega_\mu} \frac{\partial}{\partial \Omega_\nu} \right] \delta[\bar{\Omega} - \bar{\Omega}(\bar{\psi})] \\
&= - \sum_\mu \frac{\partial}{\partial \Omega_\mu} \int d\bar{\psi} p_t(\bar{\psi}) \sum_i \left\{ \sum_j J_{ij} \sin(\psi_j - \psi_i) \frac{\partial \Omega_\mu}{\partial \psi_i}(\bar{\psi}) + T \frac{\partial^2 \Omega_\mu}{\partial \psi_i^2}(\bar{\psi}) \right\} \delta[\bar{\Omega} - \bar{\Omega}(\bar{\psi})] \\
&\quad + T \sum_{\mu, \nu} \frac{\partial}{\partial \Omega_\mu} \frac{\partial}{\partial \Omega_\nu} \int d\bar{\psi} p_t(\bar{\psi}) \sum_i \frac{\partial \Omega_\mu}{\partial \psi_i}(\bar{\psi}) \frac{\partial \Omega_\nu}{\partial \psi_i}(\bar{\psi}) \delta[\bar{\Omega} - \bar{\Omega}(\bar{\psi})] \\
&= - \sum_\mu \frac{\partial}{\partial \Omega_\mu} [p_t(\bar{\Omega}) \langle \sum_i \left\{ \sum_j J_{ij} \sin(\psi_j - \psi_i) \frac{\partial \Omega_\mu}{\partial \psi_i}(\bar{\psi}) + T \frac{\partial^2 \Omega_\mu}{\partial \psi_i^2}(\bar{\psi}) \right\} \rangle_{\bar{\Omega}; t}] \\
&\quad + T \sum_{\mu, \nu} \frac{\partial}{\partial \Omega_\mu} \frac{\partial}{\partial \Omega_\nu} [p_t(\bar{\Omega}) \langle \sum_i \frac{\partial \Omega_\mu}{\partial \psi_i}(\bar{\psi}) \frac{\partial \Omega_\nu}{\partial \psi_i}(\bar{\psi}) \rangle_{\bar{\Omega}; t}]
\end{aligned}$$

## $p_t(\bar{\Omega})$ の従う偏微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_t(\bar{\Omega}) = & - \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial \Omega_{\mu}} [p_t(\bar{\Omega}) \langle \sum_i \left\{ \sum_j J_{ij} \sin(\psi_j - \psi_i) \frac{\partial \Omega_{\mu}}{\partial \psi_i}(\bar{\psi}) + T \frac{\partial^2 \Omega_{\mu}}{\partial \psi_i^2}(\bar{\psi}) \right\} \rangle_{\bar{\Omega};t} ] \\ & + T \sum_{\mu, \nu} \frac{\partial}{\partial \Omega_{\mu}} \frac{\partial}{\partial \Omega_{\nu}} [p_t(\bar{\Omega}) \langle \sum_i \frac{\partial \Omega_{\mu}}{\partial \psi_i}(\bar{\psi}) \frac{\partial \Omega_{\nu}}{\partial \psi_i}(\bar{\psi}) \rangle_{\bar{\Omega};t} ] \end{aligned}$$

サブシエル アベレージ

$$\langle \dots \rangle_{\bar{\Omega};t} \equiv \frac{\int d\bar{\psi} p(\bar{\psi}) \delta[\bar{\Omega} - \bar{\Omega}(\bar{\psi})] \dots}{\int d\bar{\psi} p(\bar{\psi}) \delta[\bar{\Omega} - \bar{\Omega}(\bar{\psi})]}$$

オーダーパラメータ  $\bar{\Omega}(\bar{\psi})$  が一定の値  $\bar{\Omega}$  をとる  $\bar{\psi}$  の部分空間 (サブシエル) における平均

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_t(\bar{\Omega}) = & -\sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial \Omega_{\mu}} [p_t(\bar{\Omega}) \langle \sum_i \left\{ \sum_j J_{ij} \sin(\psi_j - \psi_i) \frac{\partial \Omega_{\mu}}{\partial \psi_i}(\bar{\psi}) + T \frac{\partial^2 \Omega_{\mu}}{\partial \psi_i^2}(\bar{\psi}) \right\} \rangle_{\bar{\Omega};t}] \\ & + T \sum_{\mu, \nu} \frac{\partial}{\partial \Omega_{\mu}} \frac{\partial}{\partial \Omega_{\nu}} [p_t(\bar{\Omega}) \langle \sum_i \left[ \frac{\partial \Omega_{\mu}}{\partial \psi_i}(\bar{\psi}) \frac{\partial \Omega_{\nu}}{\partial \psi_i}(\bar{\psi}) \right] \rangle_{\bar{\Omega};t}] \end{aligned}$$

示強変数  $\Omega_{\mu}$  の  $\psi_i$  による偏微分は  $N^{-1}$  のオーダーなので、そのような偏微分の2次の項は無視してよい。その場合は、拡散項が消えるので、決定論的方程式になり、次の方程式を得る。

$$\frac{d}{dt} p_t(\bar{\Omega}) = -\sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial \Omega_{\mu}} [p_t(\bar{\Omega}) \langle \sum_i \left\{ \sum_j J_{ij} \sin(\psi_j - \psi_i) \frac{\partial \Omega_{\mu}}{\partial \psi_i}(\bar{\psi}) + T \frac{\partial^2 \Omega_{\mu}}{\partial \psi_i^2}(\bar{\psi}) \right\} \rangle_{\bar{\Omega};t}]$$

$$\frac{d}{dt} \Omega_{\mu}(t) = \langle \sum_i \left\{ \sum_j J_{ij} \sin(\psi_j - \psi_i) + T \frac{\partial}{\partial \psi_i} \right\} \frac{\partial \Omega_{\mu}}{\partial \psi_i}(\bar{\psi}) \rangle_{\bar{\Omega};t}$$

$\langle \dots \rangle_{\bar{\Omega};t}$  は、サブシェルでの平均だが、ミクロな分布密度  $p_t(\bar{\psi})$  を含んでいるため、計算が困難。そこで、サブシェル内で等分配則を仮定。

$$\begin{aligned} \langle \dots \rangle_{\bar{\Omega};t} &\equiv \frac{\int d\bar{\psi} \cancel{p(\bar{\psi})} \delta[\bar{\Omega} - \bar{\Omega}(\bar{\psi})] \dots}{\int d\bar{\psi} \cancel{p(\bar{\psi})} \delta[\bar{\Omega} - \bar{\Omega}(\bar{\psi})]} \\ &\approx \frac{\int d\bar{\psi} \delta[\bar{\Omega} - \bar{\Omega}(\bar{\psi})] \dots}{\int d\bar{\psi} \delta[\bar{\Omega} - \bar{\Omega}(\bar{\psi})]} \end{aligned}$$



### 3 Order Parameter Scheme (3OPS) :

$$\vec{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$$

$$\Omega_1 = \frac{1}{N} \sum_i \cos(\psi_i) = m_c, \quad \Omega_2 = \frac{1}{N} \sum_i \sin(\psi_i) = m_s,$$

$$\Omega_3 = \frac{1}{N} \sum_{i < j} c_{ij} \cos(\psi_i - \psi_j) = e$$

### 4 OPS :

$$\vec{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4)$$

$$\Omega_4 = \frac{1}{N} \sum_{i,j} c_{ij} \sin(\psi_i) \sin(\psi_j - \psi_i)$$

### 3 OPS

$$m_c(\bar{\psi}) = \frac{1}{N} \sum_i \cos(\psi_i), \quad m_s(\bar{\psi}) = \frac{1}{N} \sum_i \sin(\psi_i),$$

$$e(\bar{\psi}) = \frac{1}{N} \sum_{i < j} J_{ij} \cos(\psi_i - \psi_j)$$

$$\frac{d}{dt} m_c(t) = -\frac{1}{N} \left\langle \sum_j J_{ij} \sin(\psi_j - \psi_i) \sin(\psi_i) \right\rangle_{m_c(t), m_s(t), e(t)} - T m_c(t)$$

$$\frac{d}{dt} m_s(t) = \frac{1}{N} \left\langle \sum_j J_{ij} \sin(\psi_j - \psi_i) \cos(\psi_i) \right\rangle_{m_c(t), m_s(t), e(t)} - T m_s(t)$$

$$\frac{d}{dt} e(t) = \frac{1}{N} \left\langle \left( \sum_j J_{ij} \sin(\psi_j - \psi_i) \right)^2 \right\rangle_{m_c(t), m_s(t), e(t)} - 2T e(t)$$

サブシェル平均をとるためには、有限結合度の場合は、ミクロカノニカルではなくカノニカル集団が便利。

$$\delta[\bar{\Omega} - \bar{\Omega}(\bar{\psi})] = \exp\left[\hat{e} \sum_{i < j} J_{ij} \cos(\psi_i - \psi_j) + \hat{m}_c \sum_i \cos(\psi_i) + \hat{m}_s \sum_i \sin(\psi_i)\right]$$

$\hat{m}_c, \hat{m}_s, \hat{e}$  は、

$$\langle m_c(\bar{\psi}) \rangle = m_c(t)$$

$$\langle m_s(\bar{\psi}) \rangle = m_s(t)$$

$$\langle e(\bar{\psi}) \rangle = e(t)$$

となるように決める。また、cavity法を用いる。

# Self – consistent equations

$$\begin{aligned}
 P_i^{(j)}(\psi_i) &= \frac{1}{Z_i^{(j)}} \exp[\hat{m}_c \cos \psi_i + \hat{m}_s \sin \psi_i] \\
 &\quad \times \int d\vec{\psi}_{\partial i \setminus j} \exp[\hat{e} \sum_{l \in \partial i \setminus j} \cos(\psi_i - \psi_l)] \underline{P_{\partial i \setminus j}^{(i)}(\vec{\psi}_{\partial i \setminus j})} \\
 &= \frac{1}{Z_i^{(j)}} \exp[\hat{m}_c \cos \psi_i + \hat{m}_s \sin \psi_i] \\
 &\quad \times \int d\vec{\psi}_{\partial i \setminus j} \exp[\hat{e} \sum_{l \in \partial i \setminus j} \cos(\psi_i - \psi_l)] \underline{\prod_{l \in \partial i \setminus j} P_l^{(i)}(\psi_l)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_i(\psi_i) &= \frac{1}{Z_i} \exp[\hat{m}_c \cos \psi_i + \hat{m}_s \sin \psi_i] \\
 &\quad \times \int d\vec{\psi}_{\partial i} \exp[\beta \sum_{l \in \partial i} \cos(\psi_i - \psi_l)] \underline{\prod_{l \in \partial i} P_l^{(i)}(\psi_l)}
 \end{aligned}$$

オーダーパラメータを、 $P_i(\psi_i)$  と  $P_i^{(j)}(\psi_j)$  で表す。

$$m_c = \frac{1}{N} \sum_i \int_0^{2\pi} d\psi P_i(\psi) \cos(\psi), \quad m_s = \frac{1}{N} \sum_i \int_0^{2\pi} d\psi P_i(\psi) \sin(\psi),$$
$$e = \frac{1}{2N} \sum_i \sum_{j \in \partial i} \frac{\int d\psi_i d\psi_j P_i^{(j)}(\psi_i) P_j^{(i)}(\psi_j) e^{\hat{e} \cos(\psi_i - \psi_j)} \cos(\psi_i - \psi_j)}{\int d\psi_i d\psi_j P_i^{(j)}(\psi_i) P_j^{(i)}(\psi_j) e^{\hat{e} \cos(\psi_i - \psi_j)}}$$
$$\equiv \frac{1}{2} \langle \cos(\psi_i - \psi_j) \rangle_2.$$

## (1) ベーテ ラティス

分布の一様性を仮定する。

$$P_i^{(j)}(\psi) = P^{cav}(\psi) \quad P_i(\psi) = P^{true}(\psi)$$

## Self – consistent equation

反復法で解く。

$$P_{t+1}^{cav}(\psi) = \frac{1}{Z_{cav,t}} e^{\hat{m}_c \cos \psi + \hat{m}_s \sin \psi} \\ \times \left[ \int_{-\pi}^{\pi} d\psi' e^{\hat{c} \cos(\psi - \psi')} P_t^{cav}(\psi') \right]^{c-1}$$

# 3 OPS

## オーダーパラメータの時間発展方程式

$$\frac{d}{dt} m_c(t) = -c \frac{\int d\psi d\psi_1 P^{cav}(\psi) P^{cav}(\psi_1) e^{\hat{e} \cos(\psi_1 - \psi)} \sin(\psi_1 - \psi) \sin(\psi)}{\int d\psi d\psi_1 P^{cav}(\psi) P^{cav}(\psi_1) e^{\hat{e} \cos(\psi_1 - \psi)}} - T m_c(t)$$

$$\frac{d}{dt} m_s(t) = c \frac{\int d\psi d\psi_1 P^{cav}(\psi) P^{cav}(\psi_1) e^{\hat{e} \cos(\psi_1 - \psi)} \sin(\psi_1 - \psi) \cos(\psi)}{\int d\psi d\psi_1 P^{cav}(\psi) P^{cav}(\psi_1) e^{\hat{e} \cos(\psi_1 - \psi)}} - T m_s(t)$$

$$\frac{d}{dt} e(t) = \frac{\int d\psi \prod_{i=1}^c [d\psi_i P^{cav}(\psi_i)] e^{\hat{e} \sum_i \cos(\psi_i - \psi) + \hat{m}_c \cos(\psi) + \hat{m}_s \sin(\psi)} (\psi') e^{\hat{e} \cos(\psi' - \psi)} \left( \sum_i \sin(\psi_i - \psi) \right)^2}{\int d\psi \prod_{i=1}^c [d\psi_i P^{cav}(\psi_i)] e^{\hat{e} \sum_i \cos(\psi_i - \psi) + \hat{m}_c \cos(\psi) + \hat{m}_s \sin(\psi)}} - 2Te(t)$$

3 OPSにおいて、平衡状態は発展方程式の定常解となるか？

以下の条件のもとで、発展方程式の右辺が0となることを示すことができる。

1.  $\hat{m}_c = 0, \hat{m}_s = 0, \hat{e} = \beta$

2.  $P^{cav}(-\psi) = P^{cav}(\psi)$

2より、 $m_s = 0$ である。

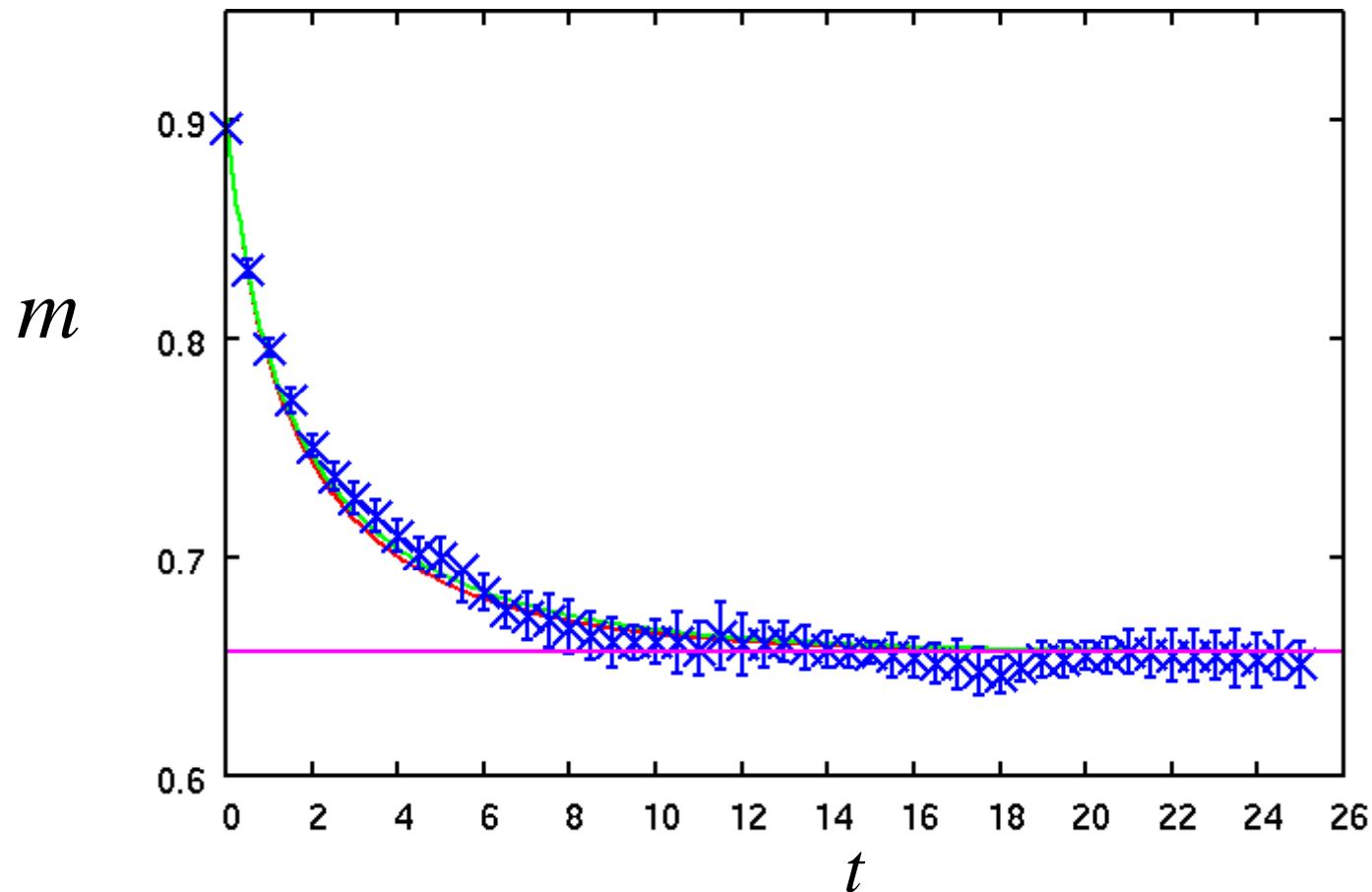


# 数値結果

オーダーパラメータ $m$ の時間変化  $c = 3, T = 0.7$

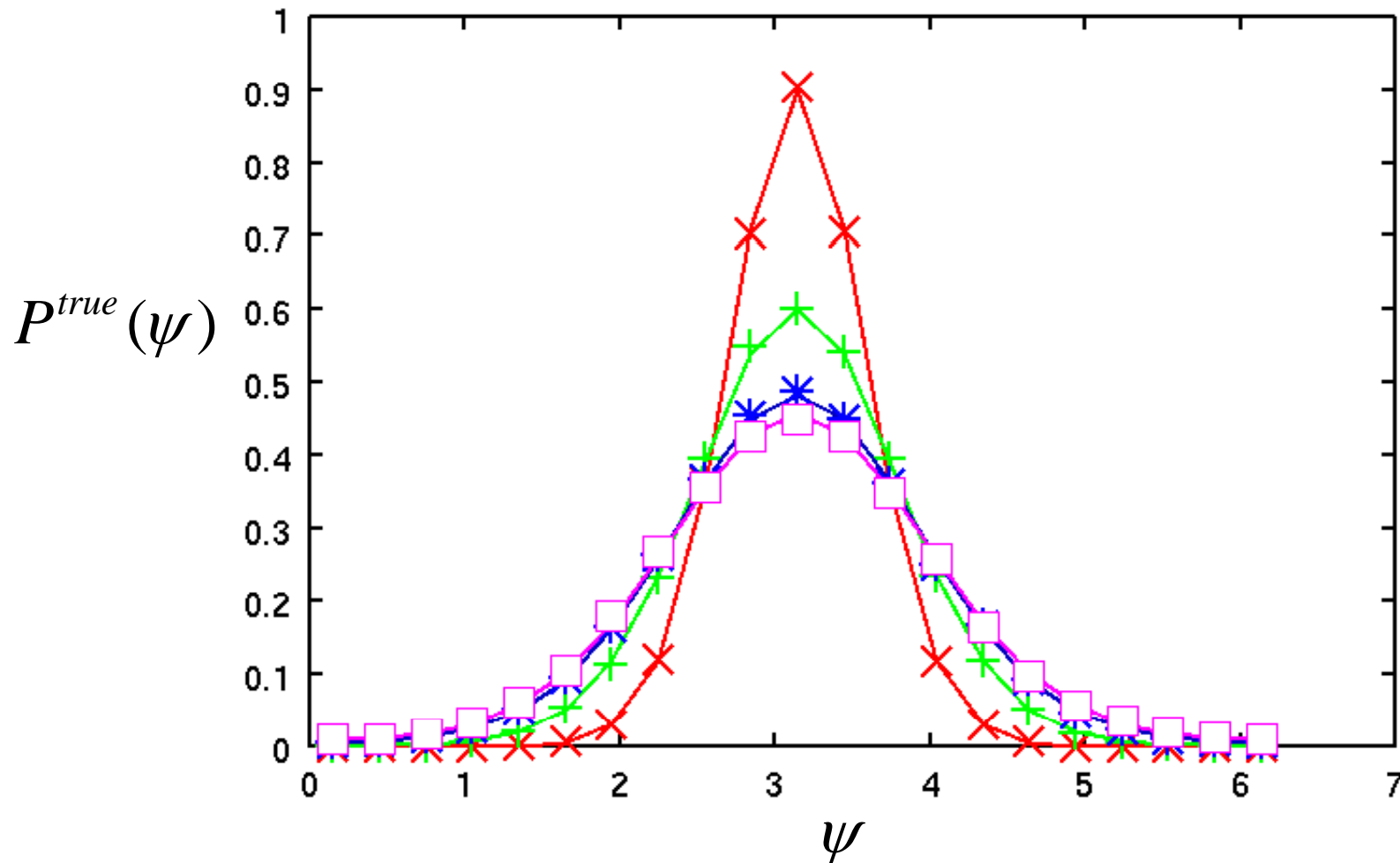
赤: 3OPS、黄緑: 4OPS、マゼンタ: 平衡値

青: Langevin eq. ( $N = 4000$ ) サンプル数 10



# 数値結果

位相分布密度  $P^{true}(\psi)$  の時間変化、  $c = 3, T = 0.7$   
実線: 3OPS、記号: Langevin eq.、 ( $N = 4000$ ) サンプル数10  
赤:  $t = 0$  黄緑:  $t = 1$ 、青:  $t = 5$ 、マゼンタ:  $t = 20$



## (2) Sparse random network

すべてのサイト、及びその近傍を考える。

Cavity 場

$$P_i^{(j)}(\psi_i) : i = 1, N, \quad j = 1, \partial i.$$

Marginal distribution

$$P_i(\psi_i) : i = 1, N$$

平衡状態における解析と同様に、cavity 場のパラメータ表示を用いる。

$$P_i(\psi_i | \vec{a}_i, \vec{b}_i) \cong C_i \exp\left[\sum_{n=1}^{n_M} \left(a_{i,n} \cos(n\psi_i) + b_{i,n} \sin(n\psi_i)\right)\right]$$

$$P_i^{(j)}(\psi_i | \vec{a}_i^{(j)}, \vec{b}_i^{(j)}) \cong C_i^{(j)} \exp\left[\sum_{n=1}^{n_M} \left(a_{i,n}^{(j)} \cos(n\psi_i) + b_{i,n}^{(j)} \sin(n\psi_i)\right)\right]$$

$$\vec{a}_i^{(j)} = (a_{i,1}^{(j)}, a_{i,2}^{(j)}, \dots, a_{i,n_M}^{(j)}), \quad \vec{b}_i^{(j)} = (b_{i,1}^{(j)}, b_{i,2}^{(j)}, \dots, b_{i,n_M}^{(j)}).$$

$$\vec{a}_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n_M}), \quad \vec{b}_i = (b_{i,1}, b_{i,2}, \dots, b_{i,n_M}),$$

これらを、Self-consistent equationに代入して、Recursion relationsを得る。

## Recursion relations for $\vec{a}_i^{(j)}$ and $\vec{b}_i^{(j)}$

$$a_{i,m}^{(j)} = \hat{m}_c \delta_{m,1} + \sum_{l \in \hat{\partial}i \setminus j} u_{i,m}^{(l)}, \quad b_{i,m}^{(j)} = \hat{m}_s \delta_{m,1} + \sum_{l \in \hat{\partial}i \setminus j} v_{i,m}^{(l)}, \quad m > 0.$$

$$u_{i,m}^{(l)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\pi} \cos(m\phi) \times \ln \left( \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{\pi} \exp[\hat{e} \cos(\phi - \phi')] + \sum_{n=1}^{n_M} (a_{i,n}^{(j)} \cos(n\psi_i) + b_{i,n}^{(j)} \sin(n\psi_i)) \right]$$

$$v_{i,m}^{(l)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\pi} \sin(m\phi) \times \ln \left( \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{\pi} \exp[\hat{e} \cos(\phi - \phi')] + \sum_{n=1}^{n_M} (a_{i,n}^{(j)} \cos(n\psi_i) + b_{i,n}^{(j)} \sin(n\psi_i)) \right]$$

## Determination of $\vec{a}_i$ and $\vec{b}_i$

$$a_{i,m} = \sum_{l \in \partial i} u_{i,m}^{(l)}, \quad b_{i,m} = \sum_{l \in \partial i} v_{i,m}^{(l)}, \quad m > 0.$$

数値計算を行うと、 $n_M = 3$  で十分。すなわち、フーリエモード 6個で十分。

# 3 OPS

## オーダーパラメータの時間発展方程式

$$\frac{d}{dt}m_c(t) = \left\langle \sin(\psi_i - \psi_j) \sin(\psi_i) \right\rangle_2 - Tm_c(t),$$

$$\frac{d}{dt}m_s(t) = \left\langle \sin(\psi_j - \psi_i) \cos(\psi_i) \right\rangle_2 - Tm_s(t),$$

$$\frac{d}{dt}e(t) = \left\langle \sin^2(\psi_j - \psi_i) \right\rangle_2 + \left\langle \sin(\psi_j - \psi_i) \sin(\psi_k - \psi_i) \right\rangle_3 - 2Te(t),$$

$$\left\langle f(\psi_i, \psi_j, \psi_k) \right\rangle_3 \equiv \frac{1}{N} \sum_i \sum_{j \in \partial i} \sum_{k \in \partial i \setminus j} \int d\psi_i \prod_{l \in \partial i} [d\psi_l P_l^{(i)}(\psi_l) e^{\hat{e} \cos(\psi_i - \psi_l)}] e^{\hat{m}_c \cos(\psi_i) + \hat{m}_s \sin(\psi_i)} f(\psi_i, \psi_j, \psi_k) \\ \times \frac{1}{\int d\psi_i \prod_{l \in \partial i} [d\psi_l P_l^{(i)}(\psi_l) e^{\hat{e} \cos(\psi_i - \psi_l)}] e^{\hat{m}_c \cos(\psi_i) + \hat{m}_s \sin(\psi_i)}}.$$

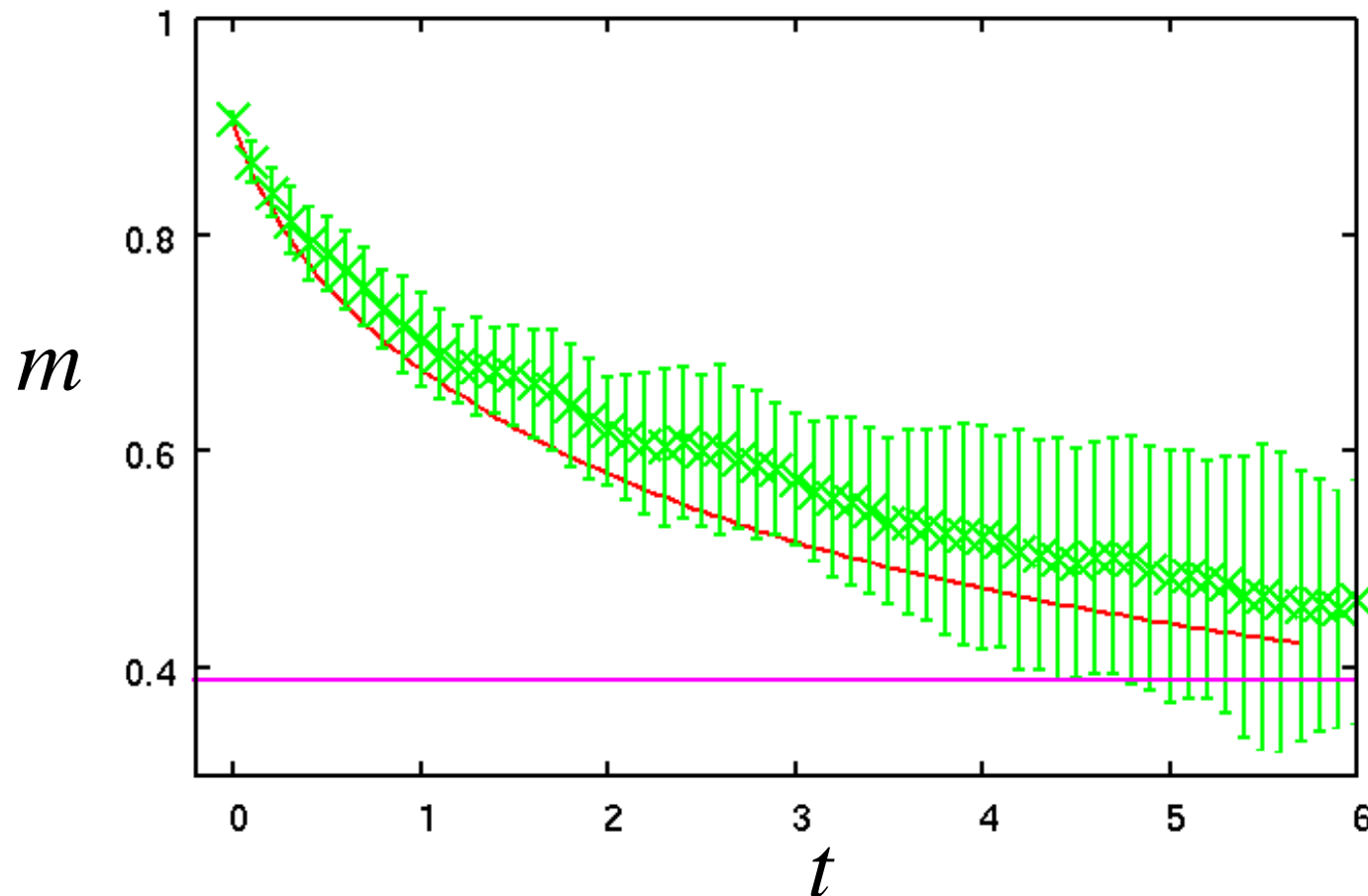
# Evolution of observable $m$

$$c = 2, T = 0.7$$

Red: 3 OPS (N=100)

Green: Langevin equation (N=100), number of samples :20

Purple: equilibrium value (レプリカ法のポピュレーションダイナミクス法) 、N=10000



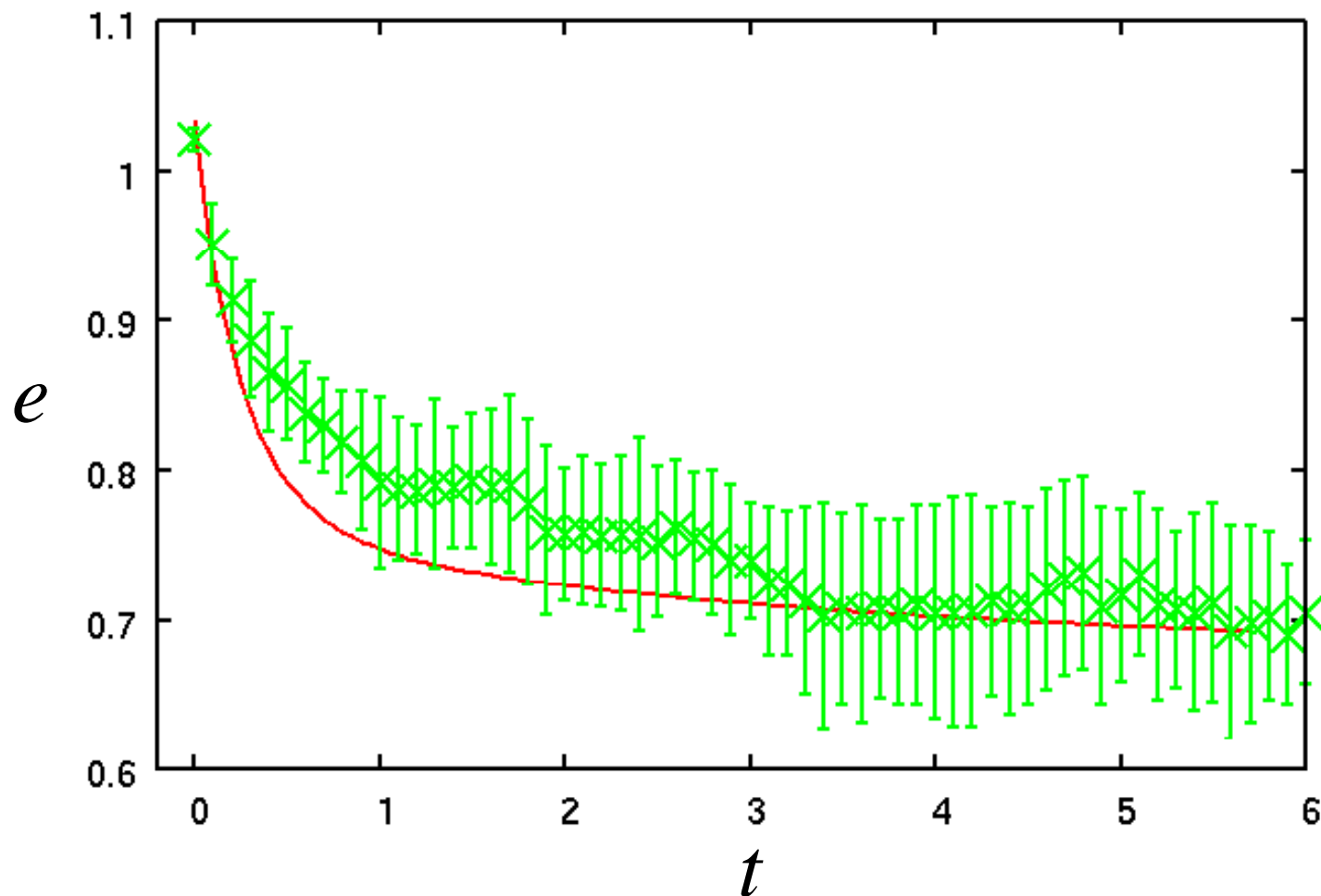


# Evolution of observable $e$

$$c = 2, T = 0.7$$

Red: 3 OPS (N=100)

Green: Langevin equation (N=100), number of samples :20



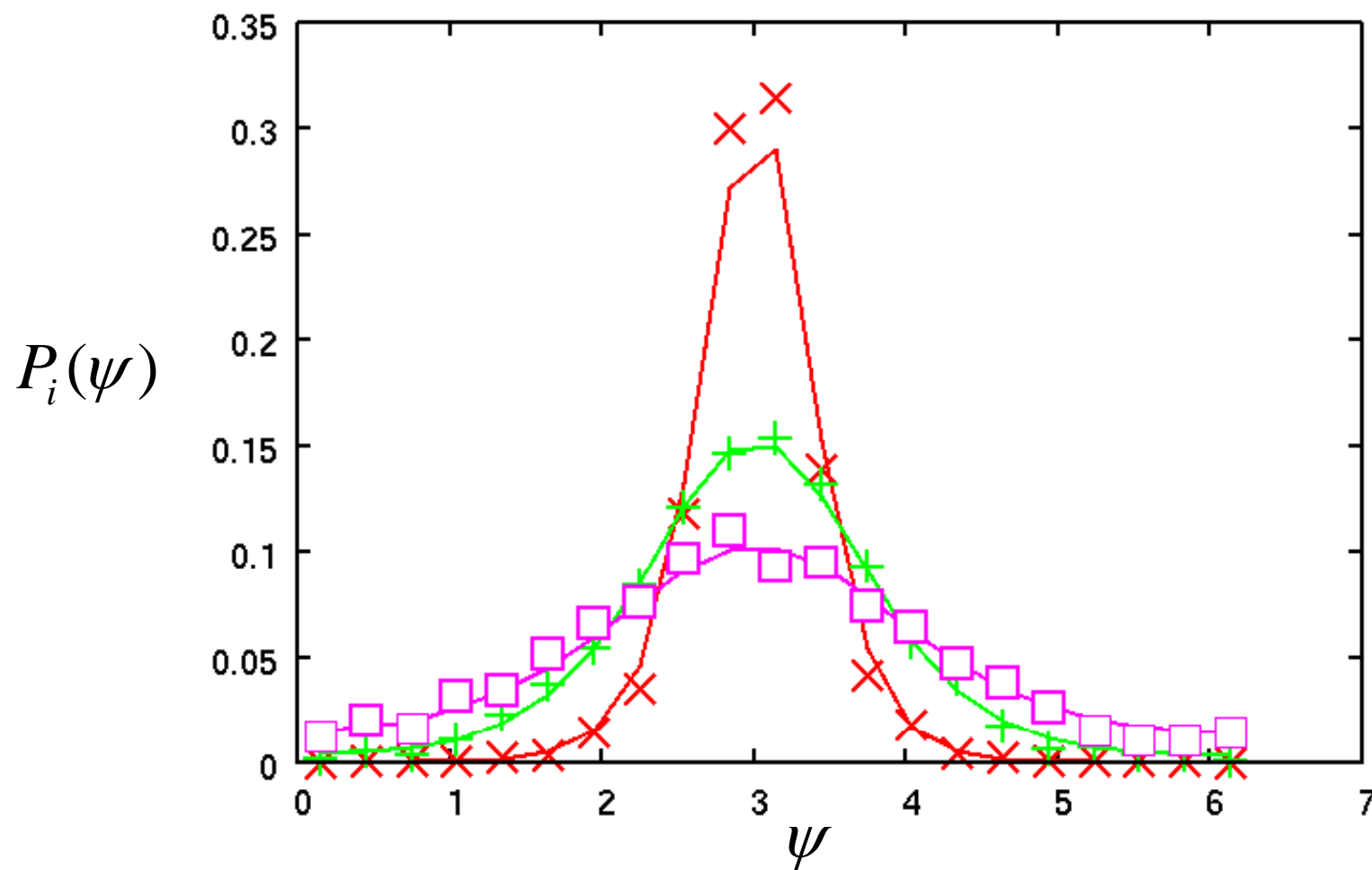
# 数値結果

$$c = 2, T = 0.7$$

位相分布密度  $P_i(\psi)$  の時間変化、初期値を  $P_i(\psi_i)$  より選ぶ

実線: 3OPS ( $N = 100, n_M = 3$ ) 記号: Langevin eq., ( $N = 100$ )

赤:  $t = 0$ , 黄緑:  $t = 1$ , マゼンタ:  $t = 5$



# V. まとめと課題など

Cavity法で疎結合位相振動子ネットワークの解析を行った。

## ○ベータ ラティス

分布関数： 近似なし。

サブシェル内での一様分布を仮定。

理論とシミュレーション結果は、よく一致。

## ○ランダムネットワーク

同時分布をfactorizeする近似を行う。

サブシェル内での一様分布を仮定。

理論とシミュレーション結果は、ほぼ一致。

# 今後の課題

## 位相振動子のネットワークモデル

疎結合ランダムネットワークのダイナミックスの  
Cavity法による解析

- a. degree  $c$  とシステムサイズ  $N$  の値を大きくして計算する。
- b. 局所分布が得られるので局所的な量を計算し、シミュレーションと比較。

# 応用

スタティックス:

疎結合系で、分布関数、変分関数、尤度関数などが系の変数で具体的に与えられる場合に、適用。

# 応用

**ダイナミクス:** 分布関数の時間発展、フォッカー-プランク方程式、マスター方程式が与えられる場合。

例えば、勾配系

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_j J_{ij} u'(x_j - x_i) + \xi_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i} + \xi_i(t),$$

$$H = \sum_{i < j} J_{ij} u(x_j - x_i) : \text{条件(可積分性など)}$$

$$u(x) = u(-x), J_{ij} = J_{ji}, u'(x) = \frac{d}{dx} u(x)$$

$\xi_i(t)$  : White Gaussian Noise

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0, \langle \xi_i(t) \xi_i(t') \rangle = 2T \delta(t - t')$$

# Cavity法と他の方法との関連

信念伝搬法 (Belief Propagation)

ジャンクションツリー (ループなし) で厳密

→ ベーテラティスの場合に対応

ループがある場合

→ スパースランダムネットワークに対応

ベーテ近似

あるノードとそれと直接相互作用するノードは厳密に考え、それ以外は、平均場で置き換える。

いずれも、Cavity法と同等。

## レプリカ法 (Replica method)

RS解と同じ結果。Cavity法では、特定のランダムネスの実現に対して計算するので、

局所的な量を計算可能。計算量が多い。

レプリカ法では、ランダム平均を行い、巨視的量を計算。局所的な量は計算できないが、計算量はすくない。



# 解析が困難な例

振動子の問題においては、  
自然振動数が分布している場合。

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \underline{\omega_i} + \sum_j J_{ij} \sin(\psi_j - \psi_i) + \xi_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial \psi_i} + \xi_i(t),$$

$$H = -\sum_i \underline{\omega_i \psi_i} - \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \cos(\psi_i - \psi_j)$$

理由：  $H$  が有界でない。

免疫系ネットワークの力学系モデル

勾配系ではない。→ 勾配系でモデル化する。

Thank you for your attention!