

長期記憶時系列の金融・経済分野への応用

Applications in Econometrics and Finance by Long Memory Processes

日時：2007年11月6日（火）13:30-16:10

場所：東京工業大学すずかけ台キャンパス

講演者：片山 直也

所属：九州大学経済学部

Table of Contents

— PART1 —

長期性・季節性・構造変化の現象の説明と
国内外での金融・経済データの適用例の文献紹介

— PART2 —

構造変化と長期性の判断に迷う例

— PART3 —

季節性と長期性を加味した時系列解析の紹介と例

— PART1 —

長期性・季節性・構造変化の現象の説明と
国内外での金融・経済データの適用例の文献紹介

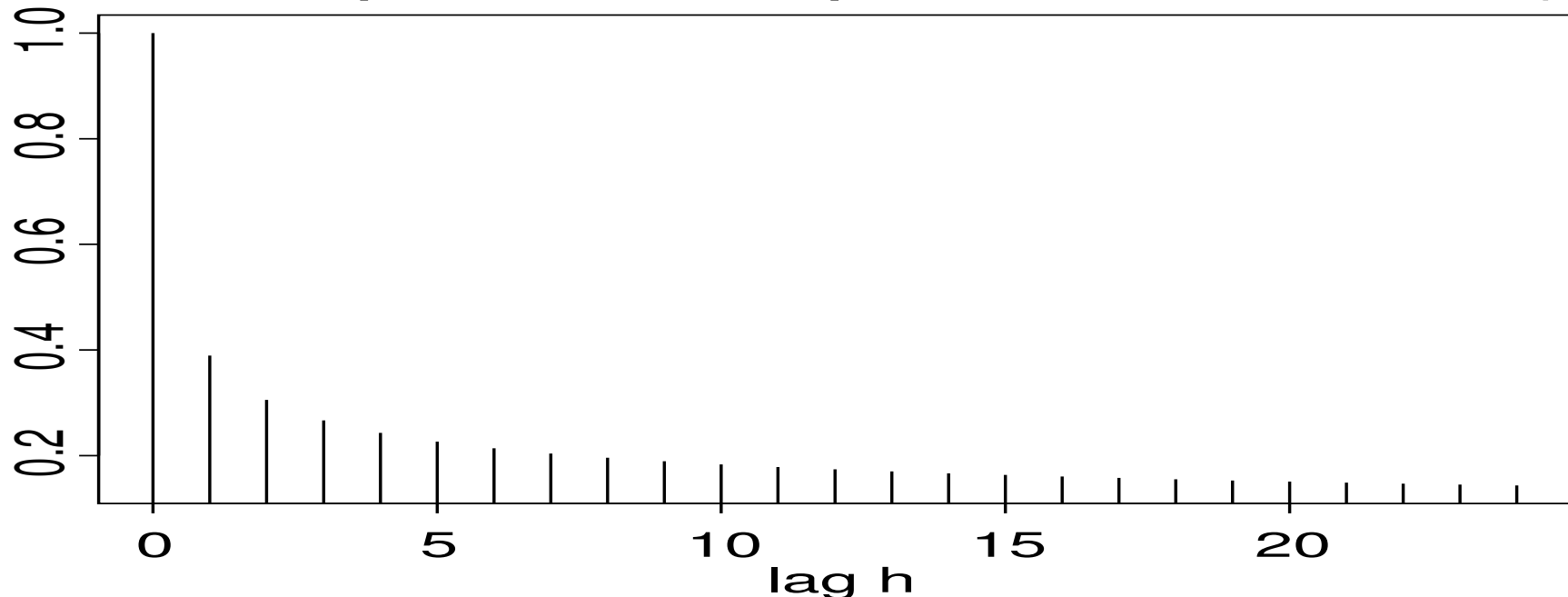
1 自己相関関数 (ACF) プロットの説明

○ ACF プロットは $\{y_t\}$ の **従属性の情報** を与える .

$$\rho(h) = (\text{ラグ } h \text{ の ACF}) = \text{Cov}[y_t y_{t+h}] / \text{Var}[y_t]$$

$$\hat{\rho}(h) = (\text{ラグ } h \text{ の SACF}) = \frac{\sum (y_t - \bar{y})(y_{t+h} - \bar{y})}{\sum (y_t - \bar{y})^2}$$

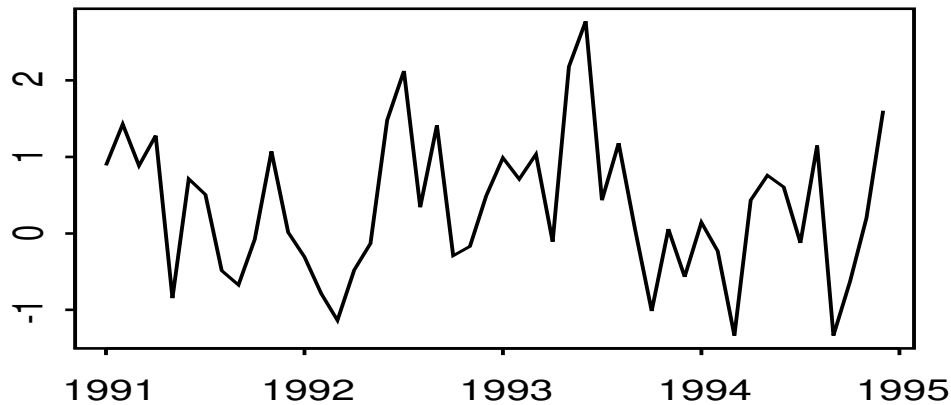
Example of ACF plot: value of rho(h)



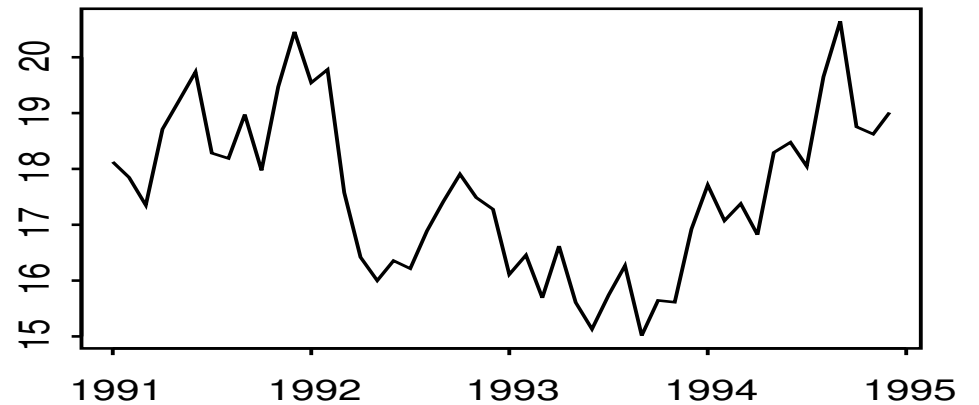
2 時系列データの特徴：長期性とは

○ 過去のデータとの **強い** 従属関係をもつ性質。

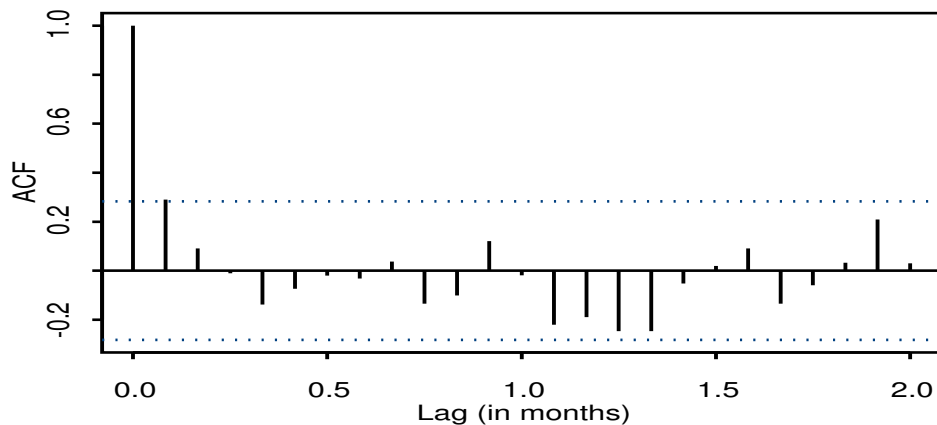
A Short Memory Time Series



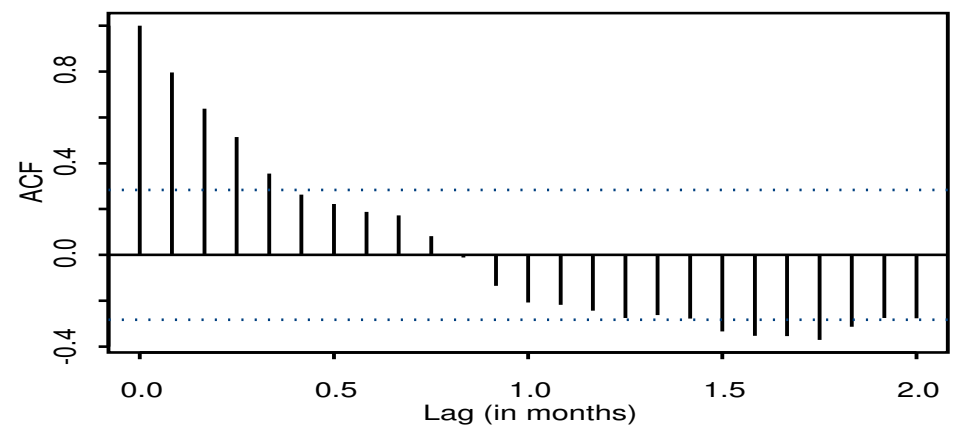
A Long Memory Time Series



Series : SM



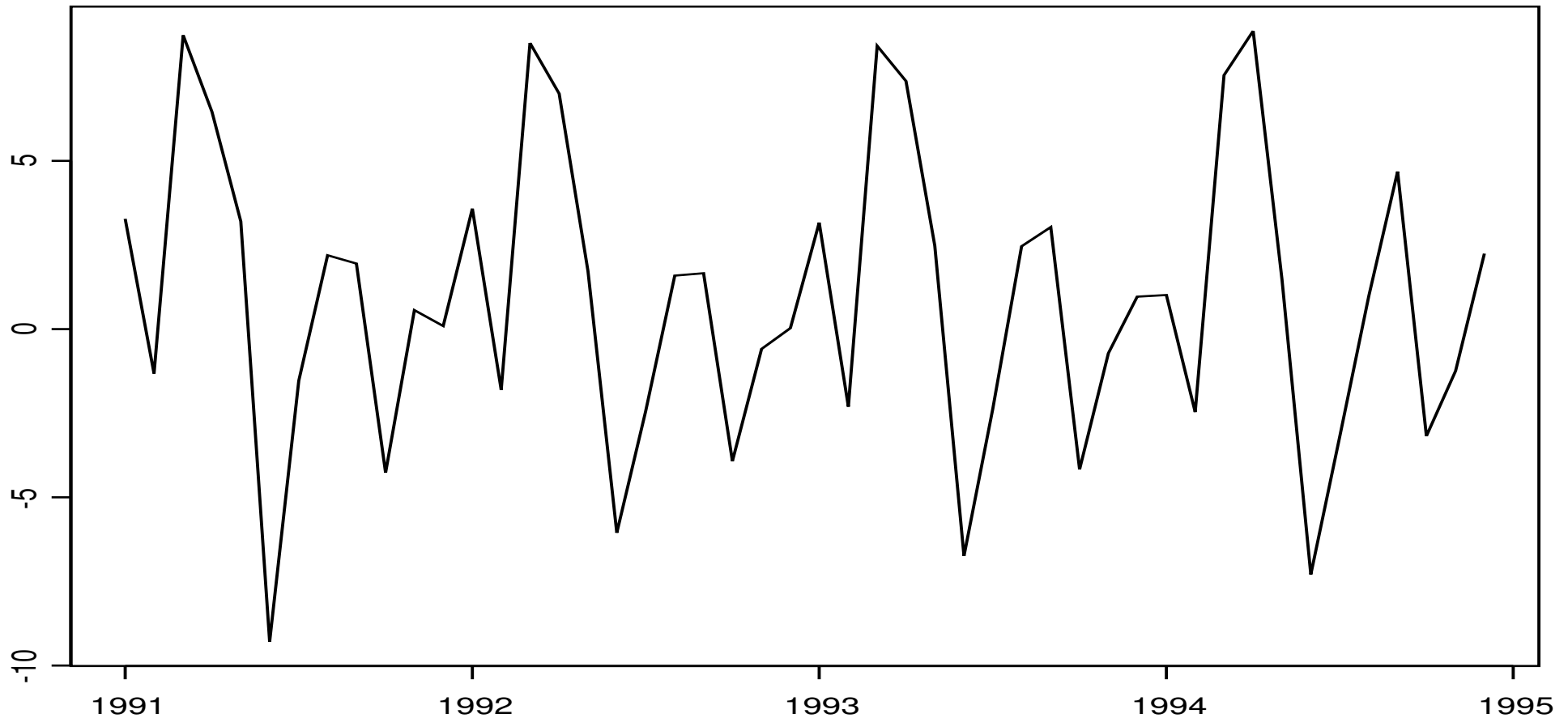
Series : LM



3 時系列データの特徴：季節性とは

- データが不確実性を伴いながら **周期的に** 変動する性質

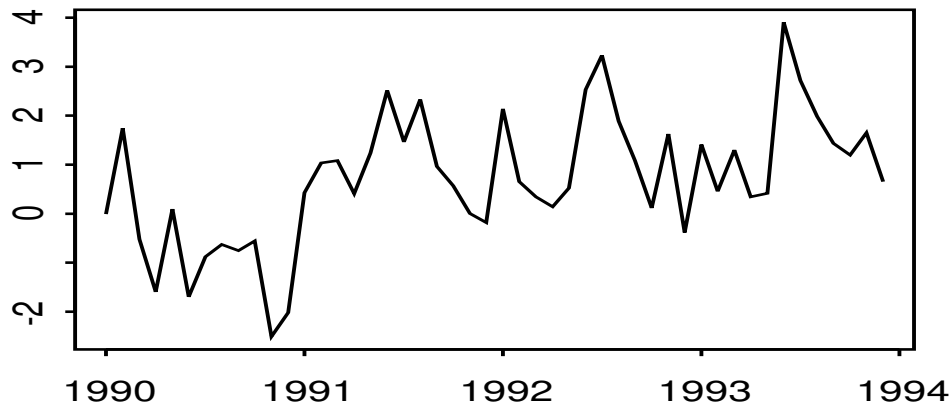
A Seasonal Time Series



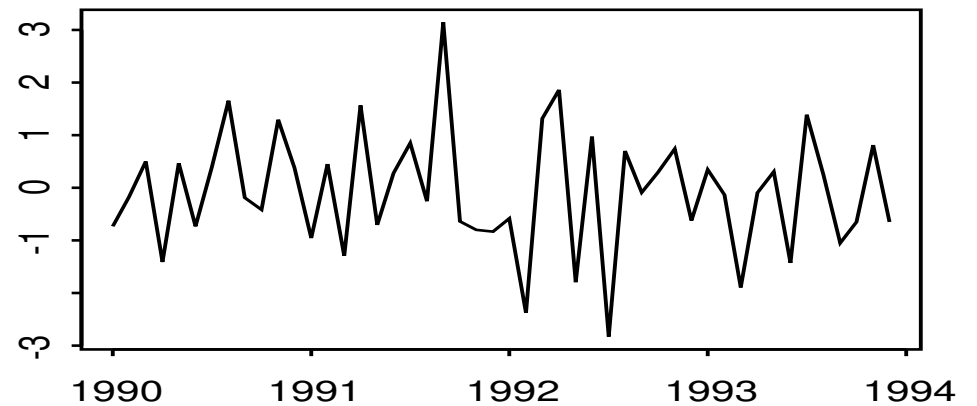
4 時系列データの特徴：長期性 + 季節性

○ 従属性が強く，自己相関関数が緩やかに周期的に減衰する。

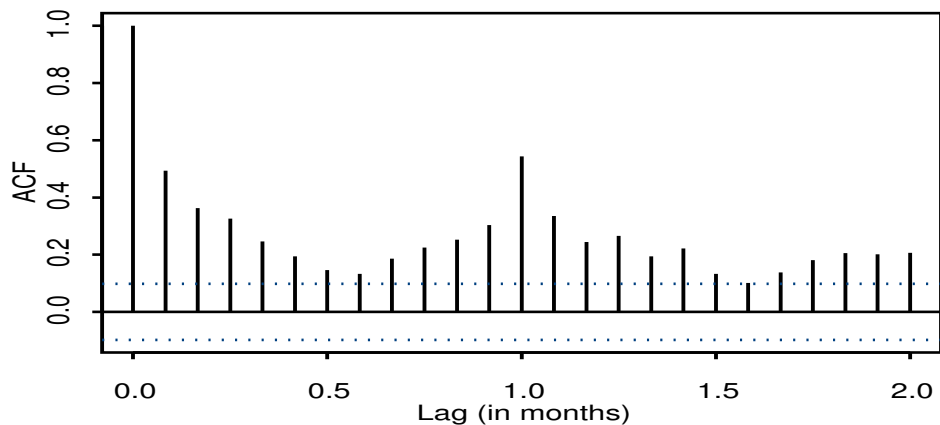
SLM1



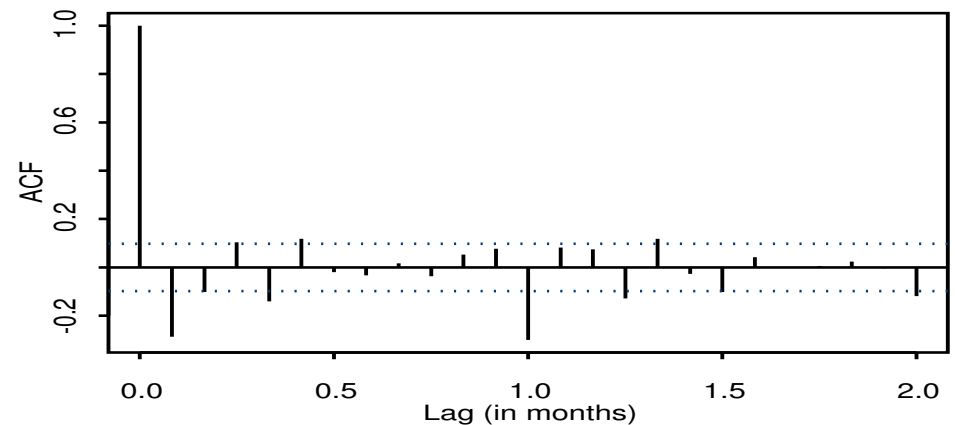
SLM2



Series : SLM1

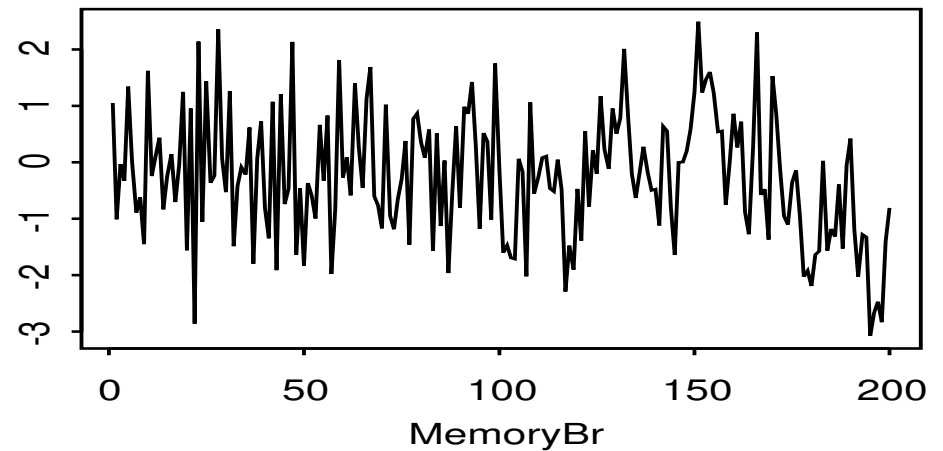
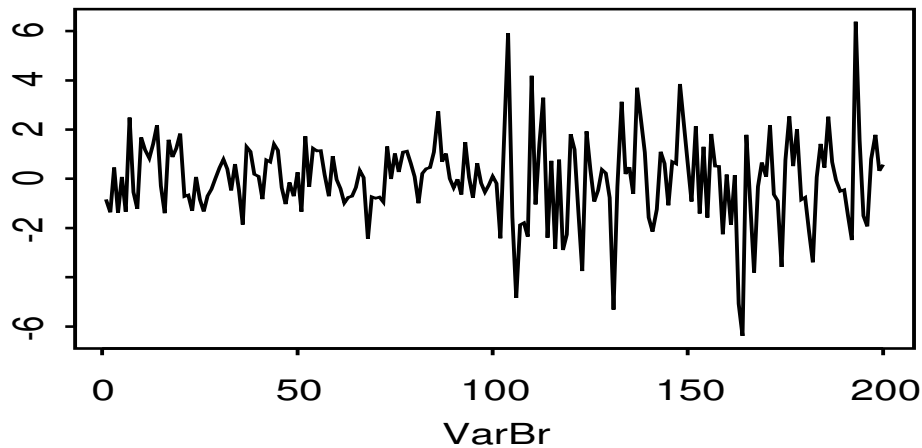
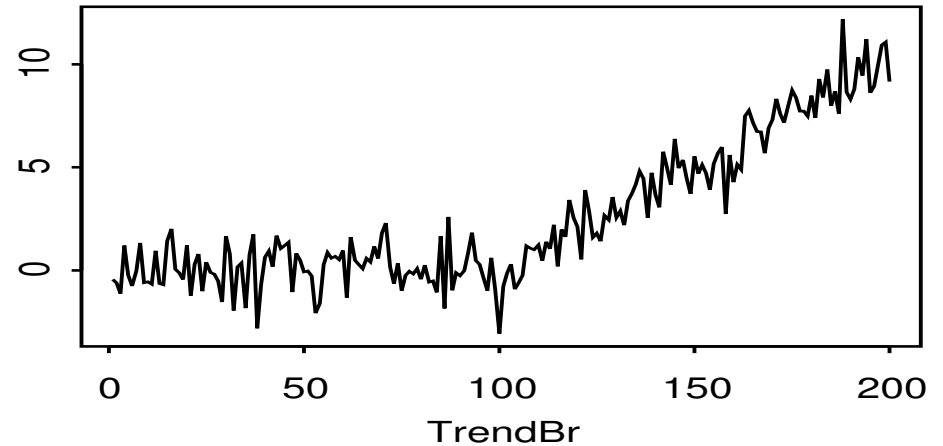
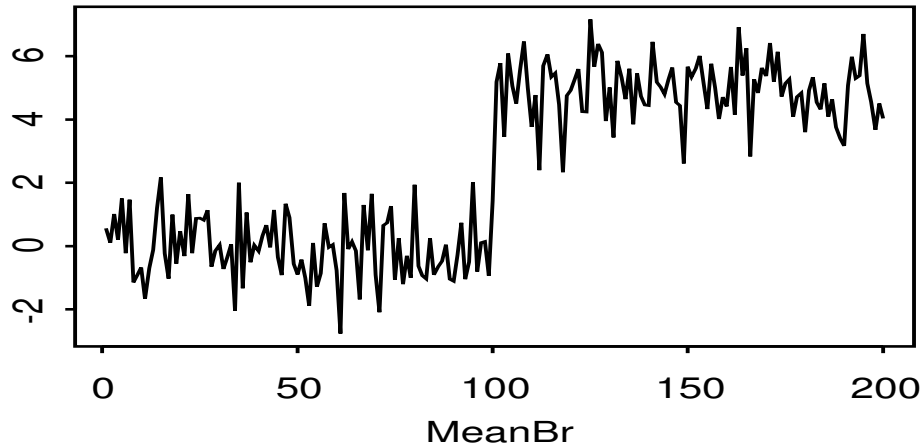


Series : SLM2



5 時系列データの特徴：構造変化とは

○ データの構造が変化する。



6 適用できそうなデータ

- 季節性 …… 自然の影響を受けるようなデータ，
税制など社会活動上の周期性を持つデータ．
- 長期性 …… ファイナンス，マーケティングデータ，
自然の影響を受けるようなデータ等．
- 構造変化 …… （おそらく）ほとんどのケース．

7 長期性の検証が行われた具体例

- 1) マクロ計量分析 … US の GNP データ , US の CPI , 労働市場の系列 , 貨幣供給量 .
- 2) 資産評価モデル (asset pricing model) … ボラティリティの長期性の検証 , 合理的バブルへの検証 .
- 3) 株価収益率 … 国内外に多数あり . 指数の長期性 .
- 4) 為替レート (exchange rate) .
- 5) 利子率 (interest rate) .

参考文献

- [1] **Baillie, R.T. (1996)** Long memory processes and fractional integration in econometrics. *Journal of Econometrics* **73**, 5–59.
- [2] **Maddala, G. S. and Kim, I.M. (1998)** *Unit roots, cointegration, and structural change (Themes in modern econometrics)*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [3] **矢島美寛 (2003)** 長期記憶をもつ時系列モデル, 統計科学のフロンティア 8 経済時系列の統計 その数理的基礎 (甘利俊一, 竹内啓, 竹村彰通, 伊庭幸人 編), 104–202, 岩波書店, 東京.

— PART2 —

構造変化と長期性の判断に迷う例：

物価指数データと関連するデータの ACF プロット

8 本邦の物価指数と関連データの概要

- p_t … 物価指数 (GDP デフレーター)
- y_t^n … 名目 GDP
- w_t … 名目賃金指数
- r_t … 10 年 (長期) と 3 ヶ月 (短期) の金利差

✍ 1975 年第 3 四半期より 2000 年第 4 四半期 ($n = 103$).

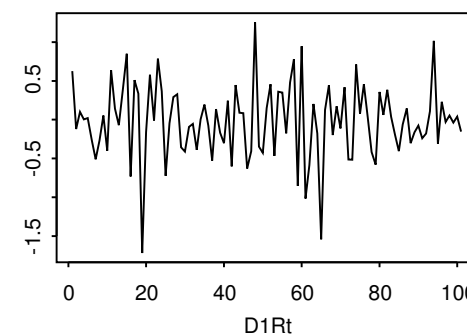
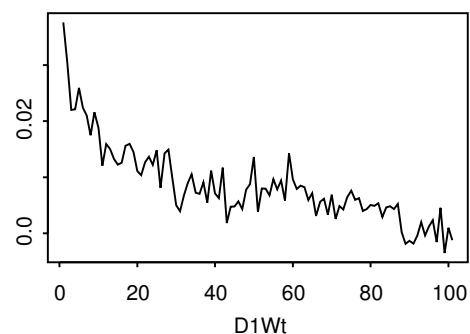
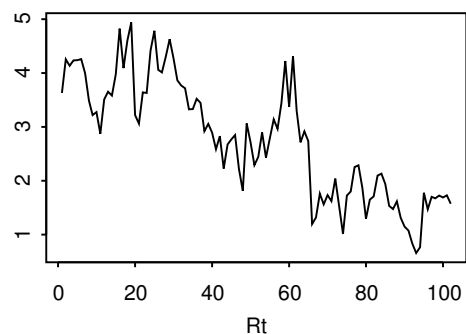
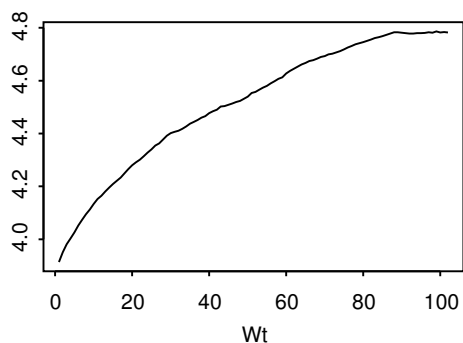
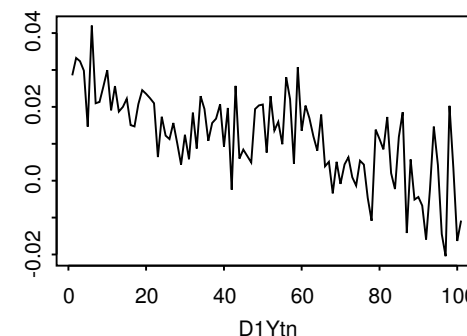
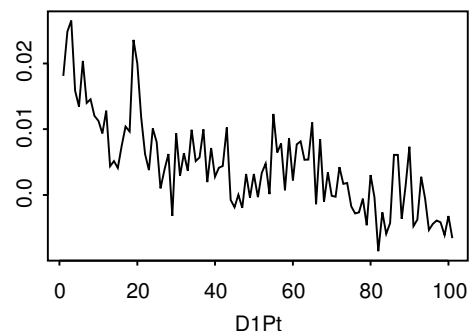
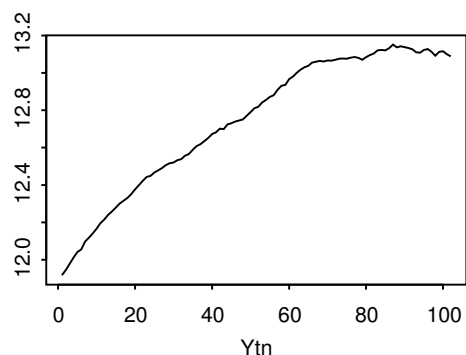
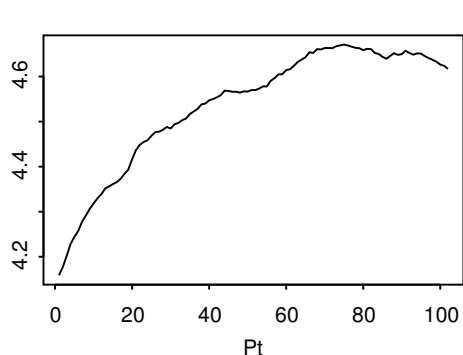
✍ p_t, y_t^n, w_t は季節調整済みで対数変換 .

✍ p_t, y_t^n の出典は , National Account Statistics, Japanese Cabinet Office web page (<http://www.esri.cao.go.jp/>).

w_t, r_t の出典は , International Financial Statistics (2004), International Monetary Fund.

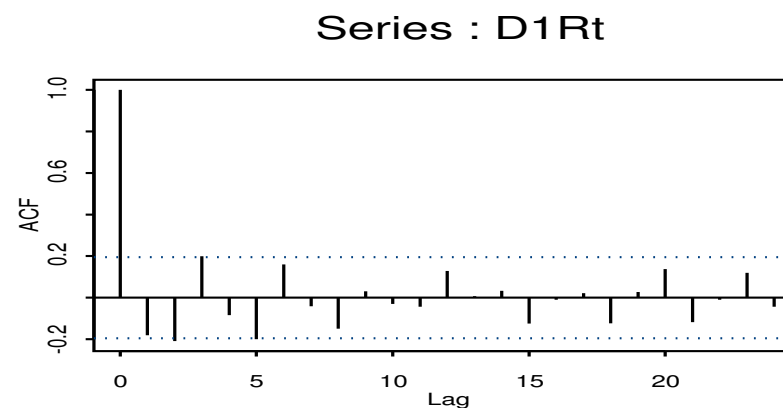
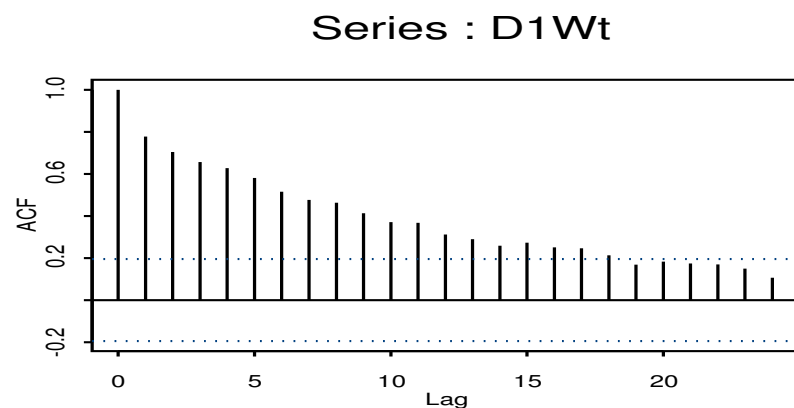
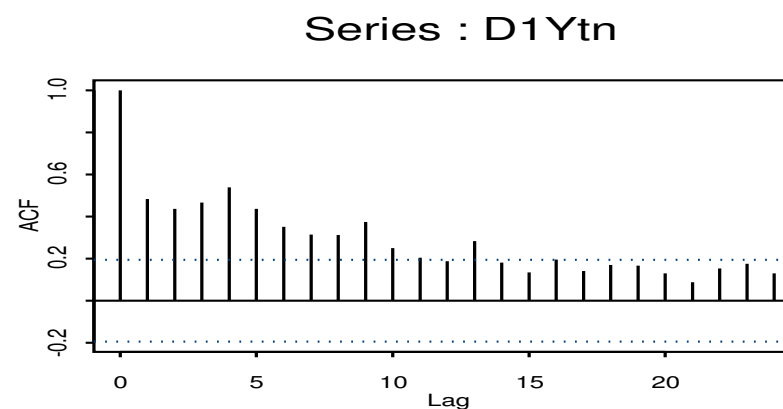
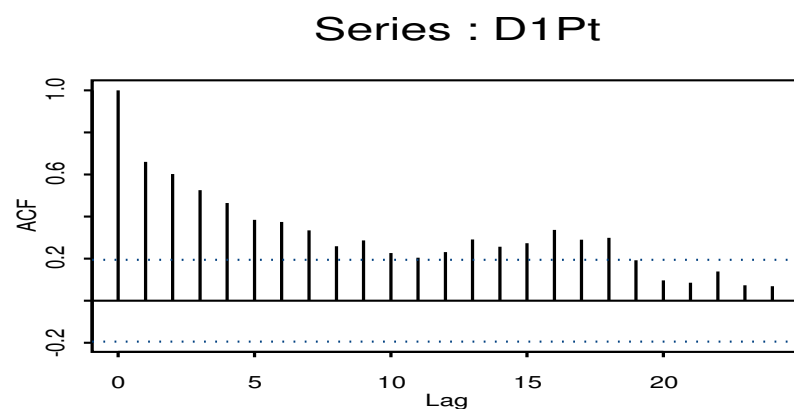
9 (p_t, y_t^n, w_t, r_t) のプロットのまとめ

- p_t, y_t^n, w_t は対数曲線に似た右方上がりの同じような曲線で
最初の 20 程度の系列は非定常性が強い
- r_t は $I(1)$ に似た振る舞い



10 $(\Delta p_t, \Delta y_t^n, \Delta w_t, \Delta r_t)$ の SACF のまとめ

- r_t は確かに $I(1)$ に似た振る舞い
- $\Delta p_t, \Delta y_t^n, \Delta w_t$ は従属性が強い。 → 長期性の存在？

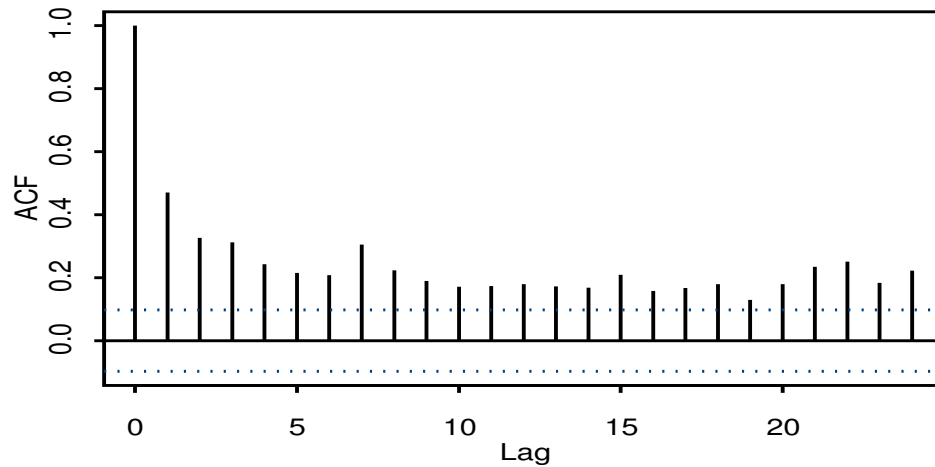


11 長期記憶モデル ($FI(d)$ 過程) とは

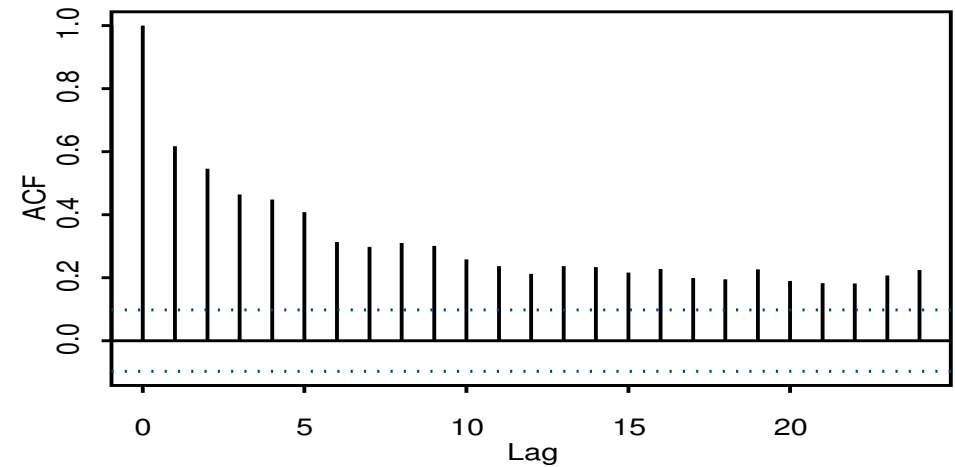
- $I(1)$ 過程 : $(1 - L)X_t = \varepsilon_t$
- $I(2)$ 過程 : $(1 - L)^2 X_t = \varepsilon_t$
- $FI(d)$ 過程 : $(1 - L)^d X_t = \varepsilon_t$, d は実数
- ✍ $FI(1) = I(1)$, $FI(2) = I(2)$
- ✍ $d < 0.5$ ならば $FI(d)$ 過程は弱定常
- ✍ $-0.5 < d$ ならば $FI(d)$ 過程は反転可能

12 SACF ($FI(d)$, $d = 0.25, 0.45, 0.75, 1.00$)

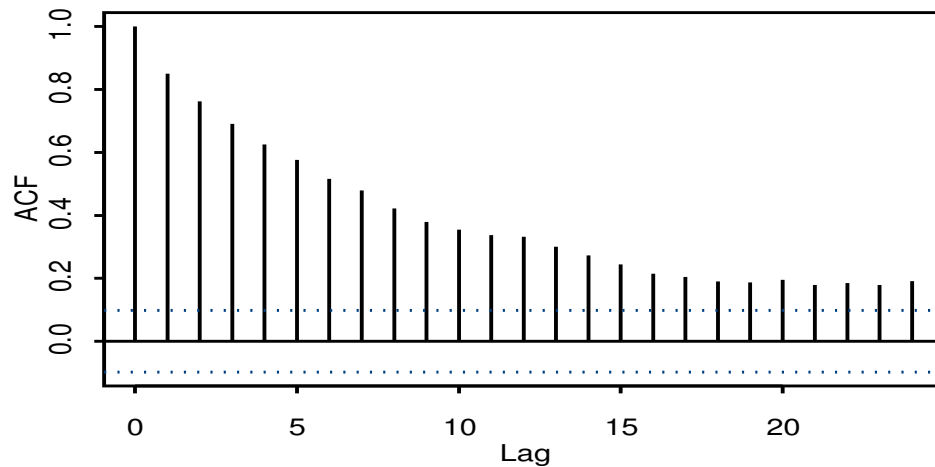
Series : d0.25



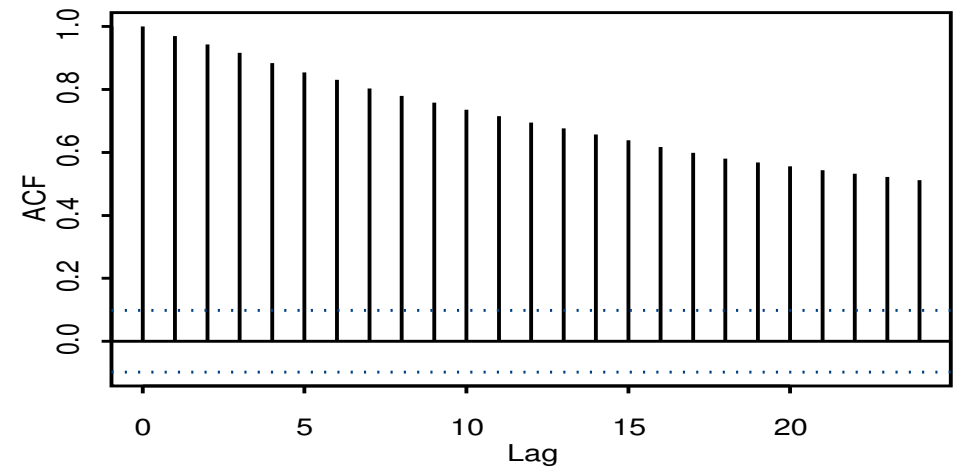
Series : d0.45



Series : d0.75

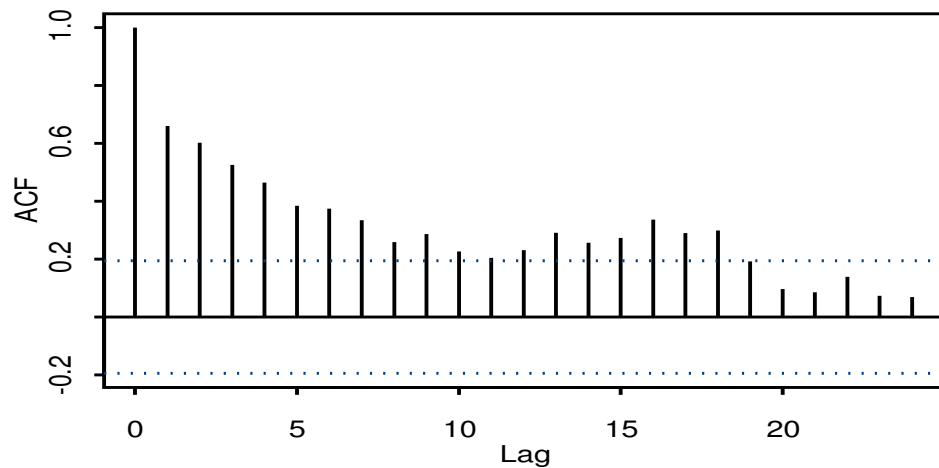


Series : d1.00

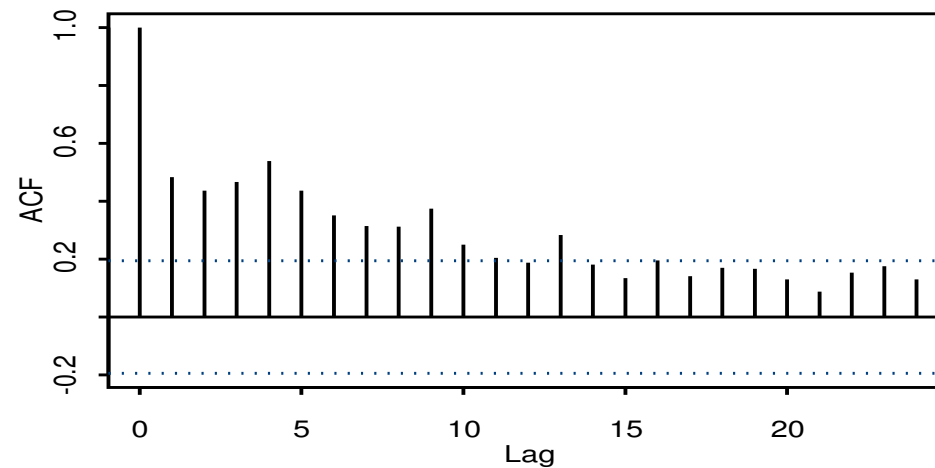


13 SACF ($\Delta p_t, \Delta y_t^n, \Delta w_t, FI(0.40)$)

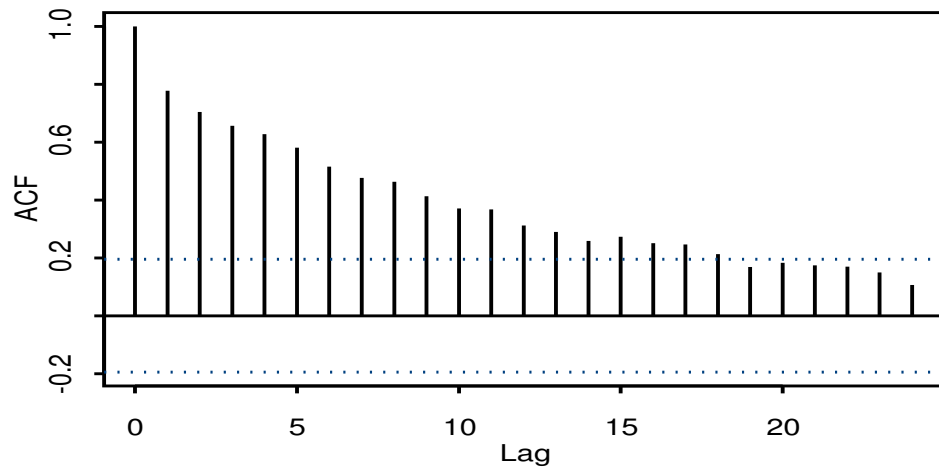
Series : D1Pt



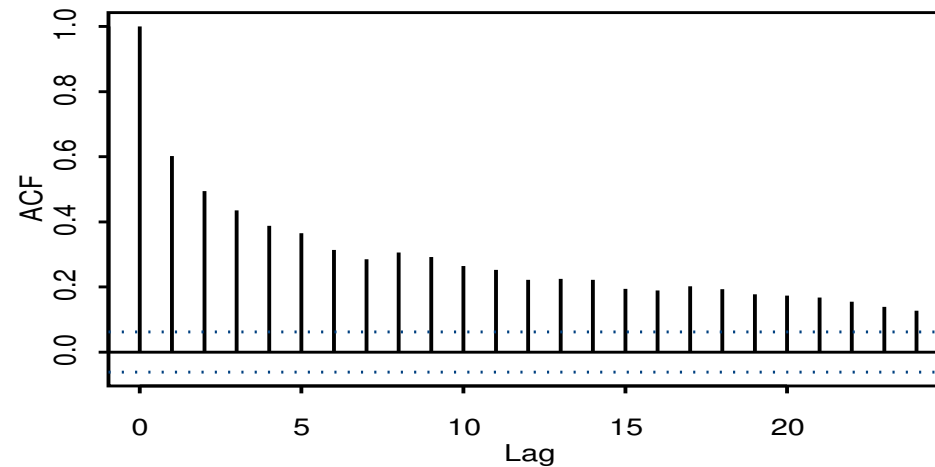
Series : D1Ytn



Series : D1Wt

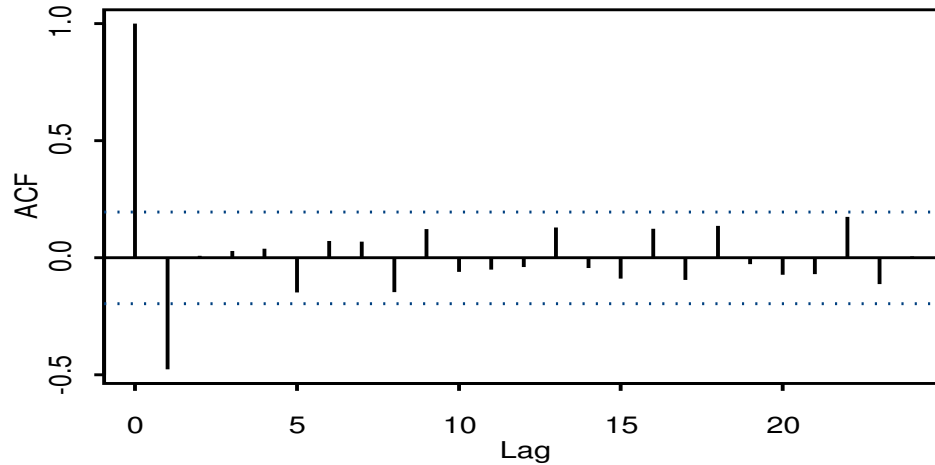


Series : FId040

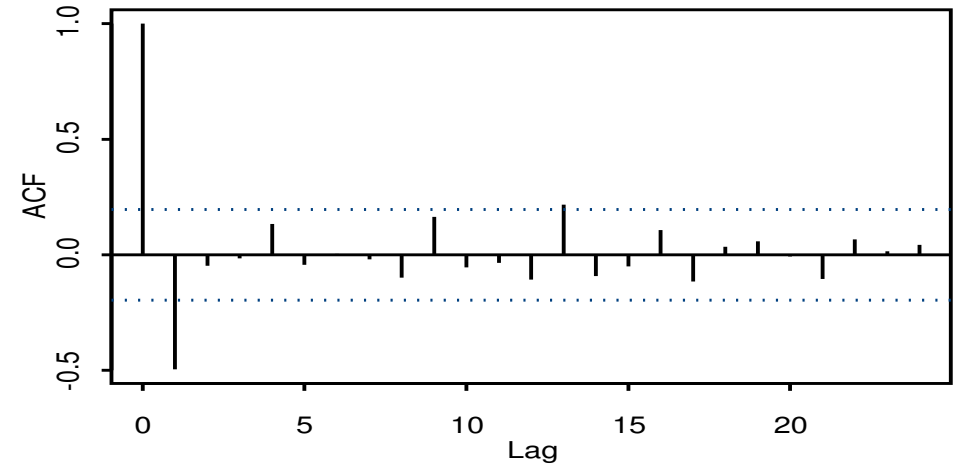


14 SACF ($\Delta^2 p_t, \Delta^2 y_t^n, \Delta^2 w_t, \Delta FI(0.40)$)

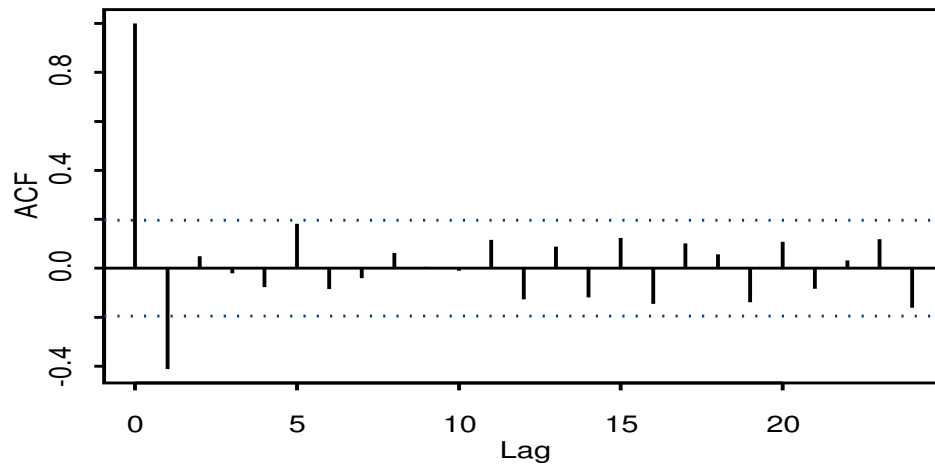
Series : D2Pt



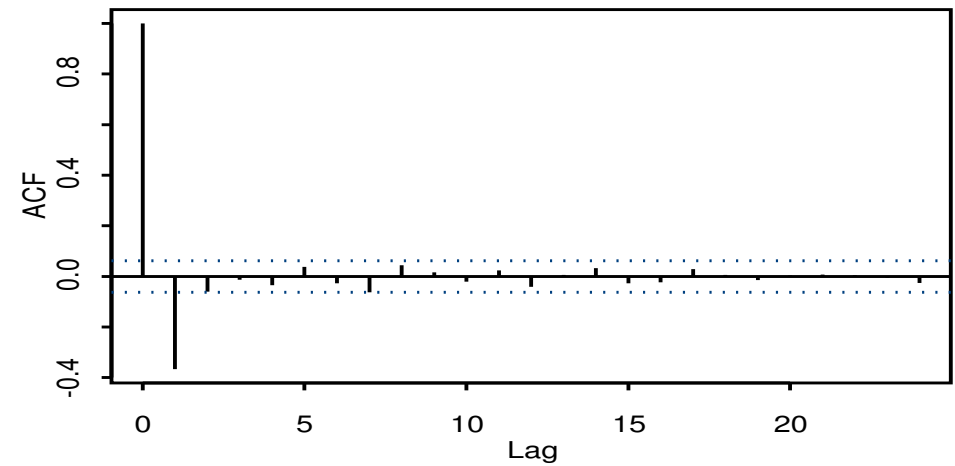
Series : D2Ytn



Series : D2Wt



Series : D1FI040

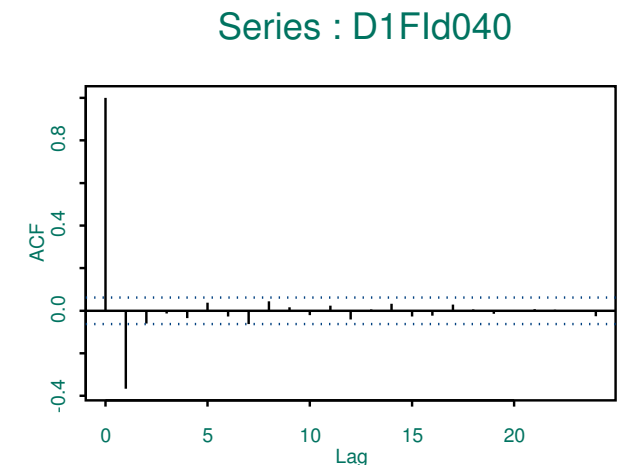
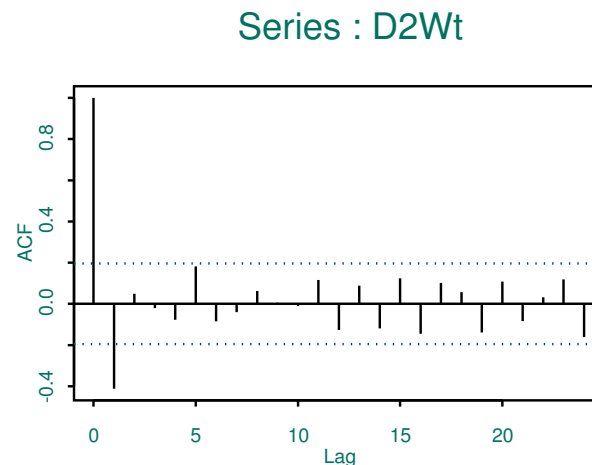
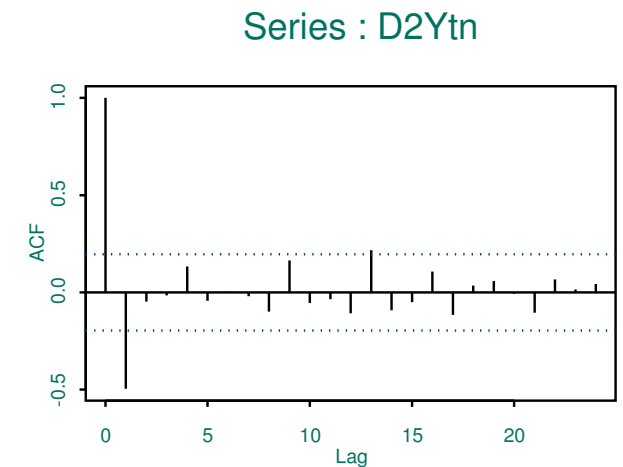
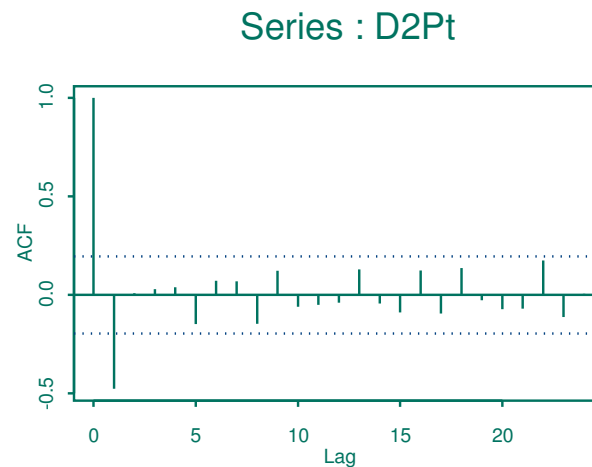


15 SACF プロットから想像されることのまとめ

- $\Delta p_t, \Delta y_t^n, \Delta w_t$ は $I(1)$ ではなく $FI(d)$ 過程 ($0 \leq d < 0.5$) の可能性がある。 → 2階差分は過剰差分の $FI(d-1)$?

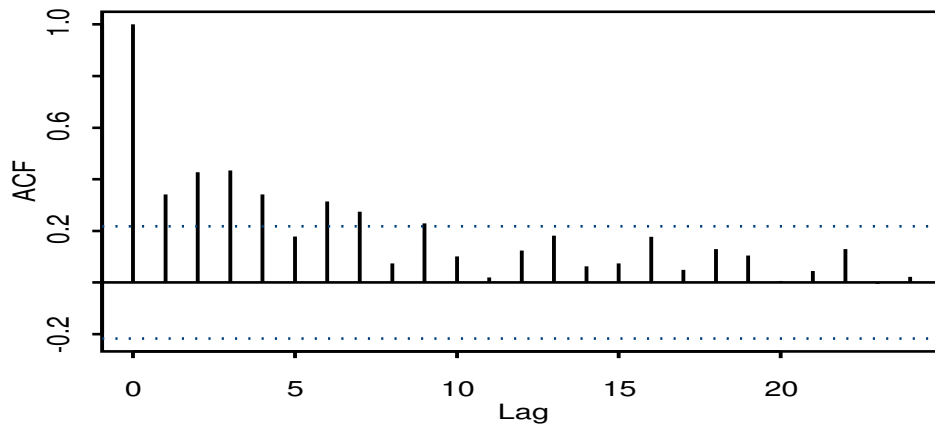
✎ ラグ 1 の自己相関は
 $\rho(1) = d/(1-d)$.

✎ $-1.0 \leq d < -0.5$ の時,
 $-0.33 < \rho(1) \leq -0.50$

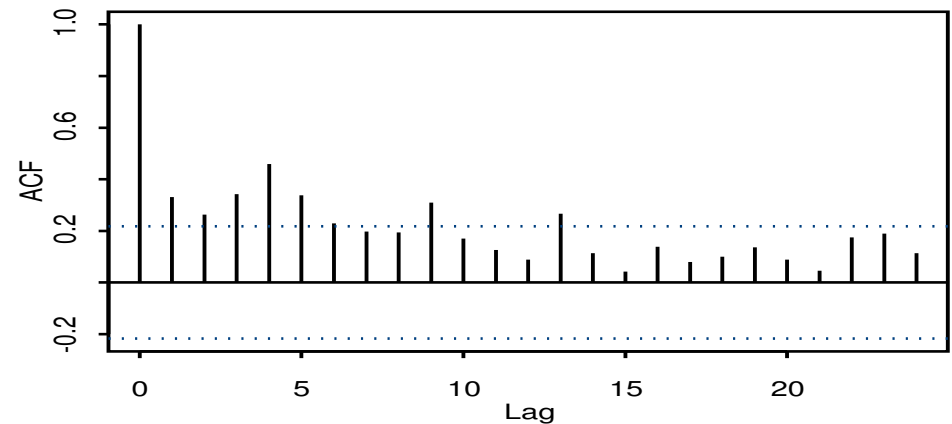


16 構造変化の疑いがかかる理由： 最初の20個のデータを取ったときのSACF

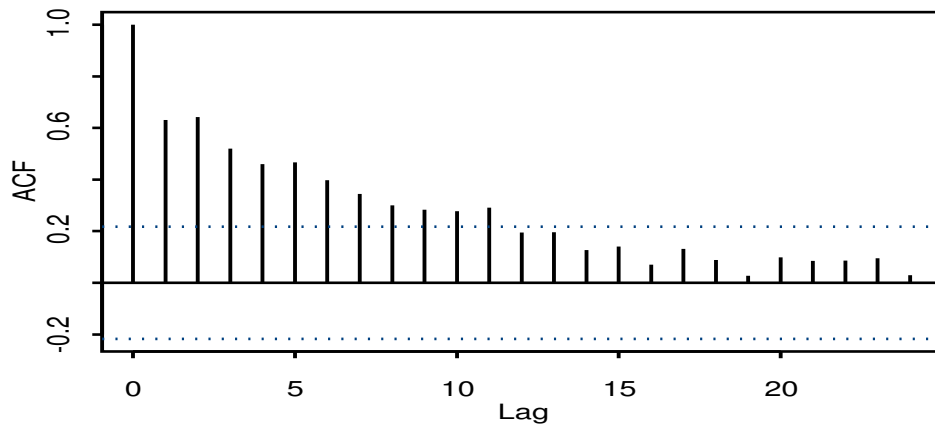
Series : D1Pt[- c(1:20)]



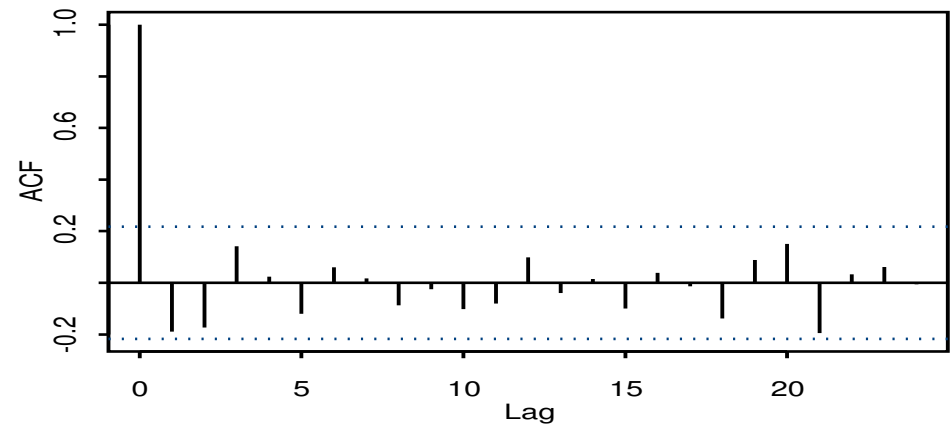
Series : D1Ytn[- c(1:20)]



Series : D1Wt[- c(1:20)]



Series : D1Rt[- c(1:20)]



17 PART2 の考察のまとめ

○ r_t は $I(1)$ だろう .

○ 1 階差分系列 $\Delta p_t, \Delta y_t^n, \Delta w_t$ は ,

「非定常 $FI(d)$ 」, 「定常 $FI(d)$ 」, 「 $I(0)$ + 構造変化」

の可能性がある . それゆえ

- 各系列の d の精査
- Fractional cointegration
- 構造変化を伴う $I(1)$ での cointegration

などを検討するべき .

— PART3 —

季節性と長期性を加味した時系列解析の紹介と例：

月次の大口電力需要データの予測

18 SARFIMA モデルとその特徴

○ 次の季節性と長期性をもつ時系列モデルを考える：

$$(1 - L)^{d_0} (1 - L^s)^{d_s} y_t = \varepsilon_t.$$

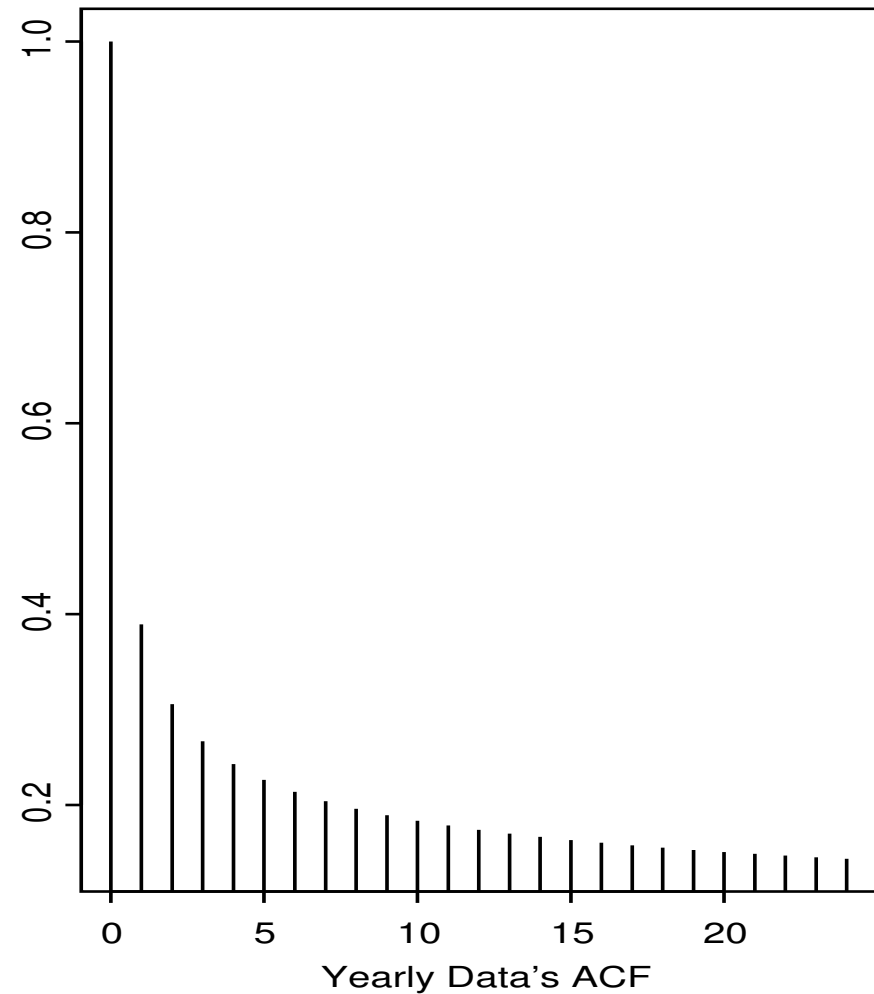
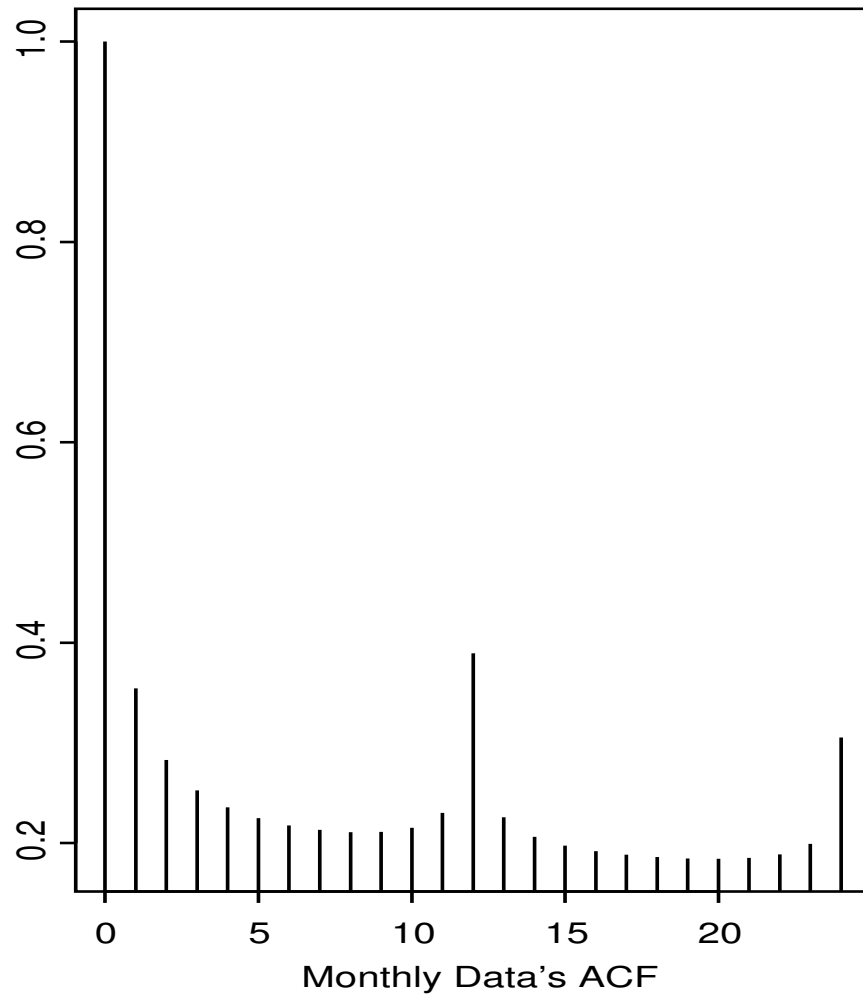
✎ s は偶数 ($s = 4$ だと四半期, 12 だと月次データに対応).

✎ $(1 - L^s)^{d_s}$ は周期的な長期性を表すフィルター.

✎ SARIMA モデル $\dots d_0$ と d_s は **既知の整数** とする.

✎ SARFIMA モデル $\dots d_0$ と d_s は **未知の実数で推定する**.

19 SARFIMA モデルの特徴： $d_0 = d_s = 0.2$ の 月次データと年次データの ACF プロット



20 SARFIMA の適用（大口電力需要データ）

○ 平均未知の SARFIMA モデル

$$(1 - L)^{d_0} (1 - L^s)^{d_s} (y_t - \mu) = u_t \quad (u_t \text{は SARMA})$$

において，Katyama (2007, Hitotsubashi J. of Econ.) は

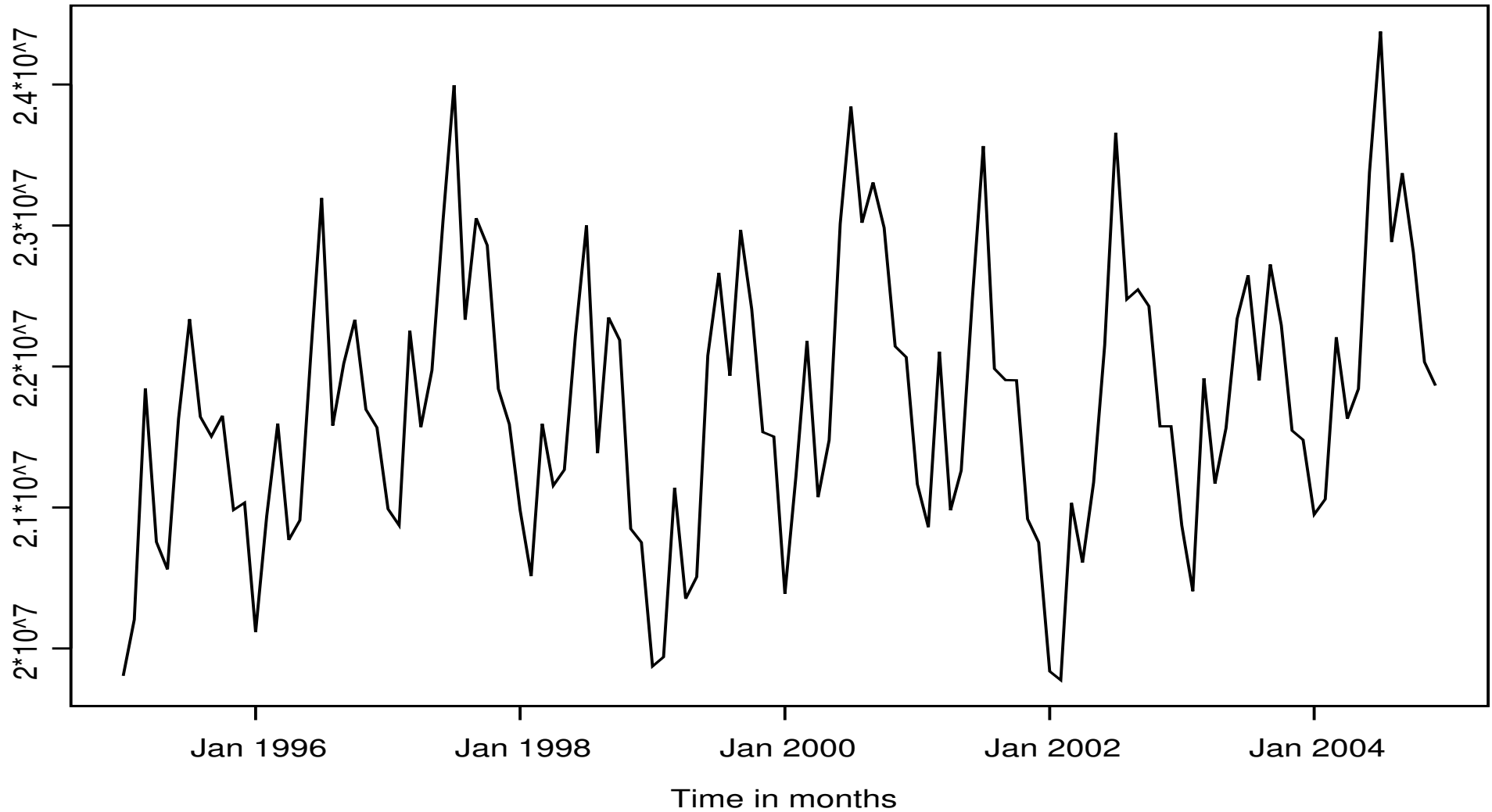
- 統計的推測問題（漸近理論を用いた理論結果）。
- 数値実験（有限標本下での漸近理論との乖離の調査）。
- 本邦の大口電力需要データへ適用（既存の SARIMA モデルより SARFIMA モデルのモデリングが有効であることを示した）。

21 大口電力需要データ（データ概要）

- 電気事業連合会の HP より入手（<http://www.fepec.or.jp/>）。
- データを占める産業種類：鋁工業・鋁業・製造業・化学工業・窯業・鉄鋼業・非鉄金属製造業・機械器具製造業・鉄道業などその他。
- 10 社計の月次データ（北海道, 東北, 東京, …, 九州, 沖縄）。
- 東京・北陸・関西の合計で約 7 割を占める。周期的サイクルもこの 3 社から見られる（他社は顕著でない）。
- 景気を反映するといわれている。
- 過去の文献では SARIMA が有効とされていたが、十分ではないので、SARIMA と SARFIMA を比較検証する。

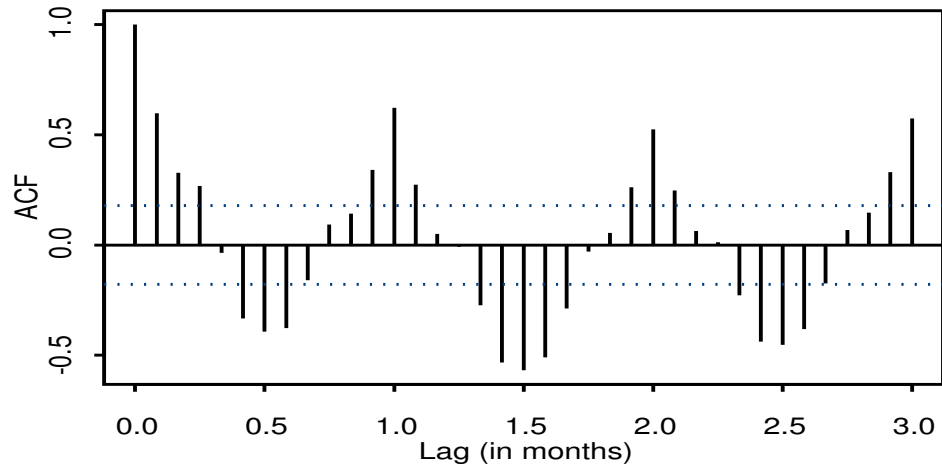
22 大口電力需要データ（月次，原系列）

Japanese Total Power Consumption 1995.01 - 2004.12

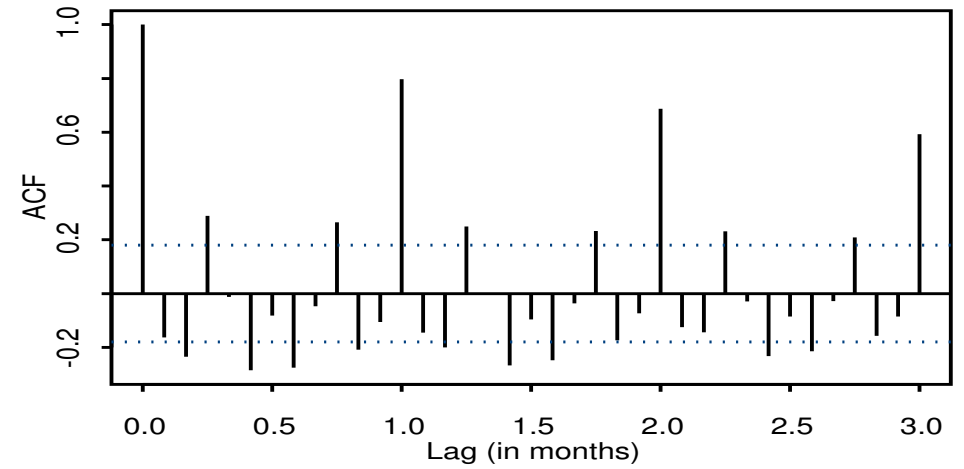


23 大口電力需要データ (SACF プロット)

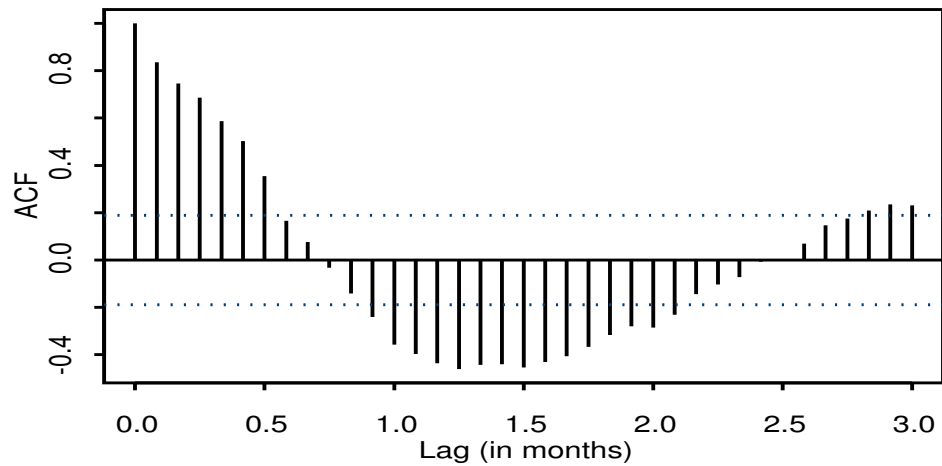
Series : A



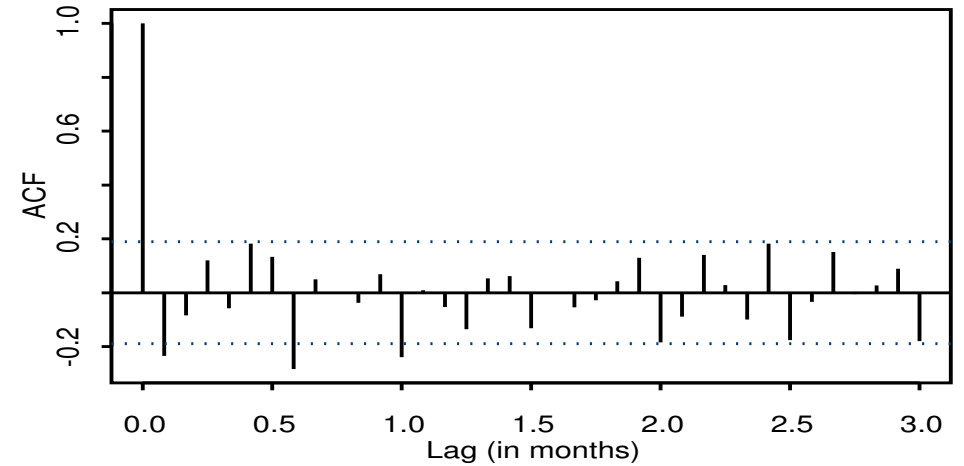
Series : B



Series : C



Series : D



24 大口電力需要データ（推定・モデル選択）

- step1. SARFIMA・SARIMA のモデルの集合を決定．
- step2. モデルのパラメータ推定・診断・検定を行い選別．
- step3. さらに情報量規準（AIC・BIC）の観点で選別．
- step4. 最終的に最良のモデルは，SARFIMA モデルの 1 つ

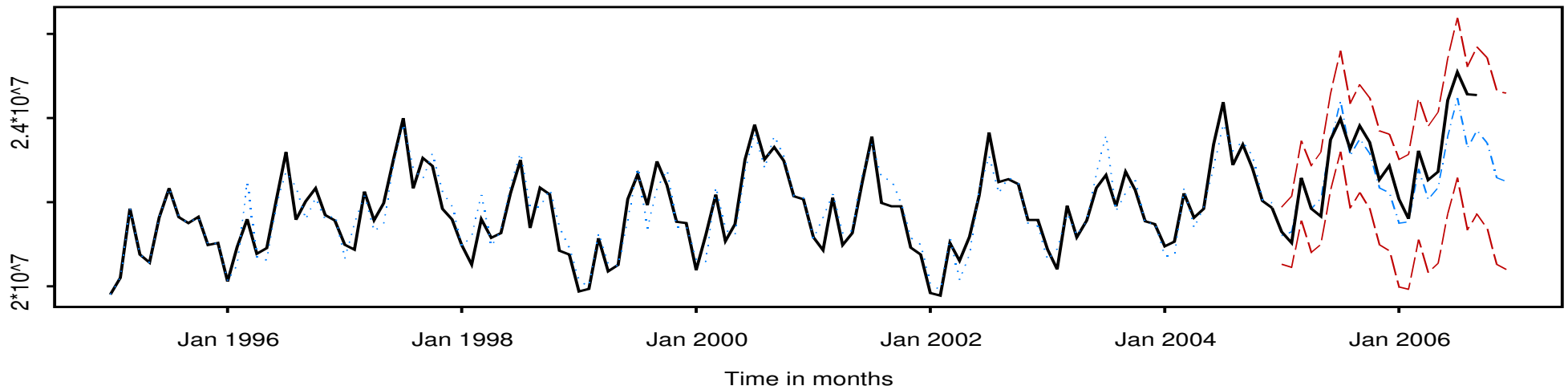
モデル ID50：

$$(1 - L)^{-0.259}(y_t - 697.729) = (1 - 0.510L^{12} - 0.192L^{24})\varepsilon_t,$$

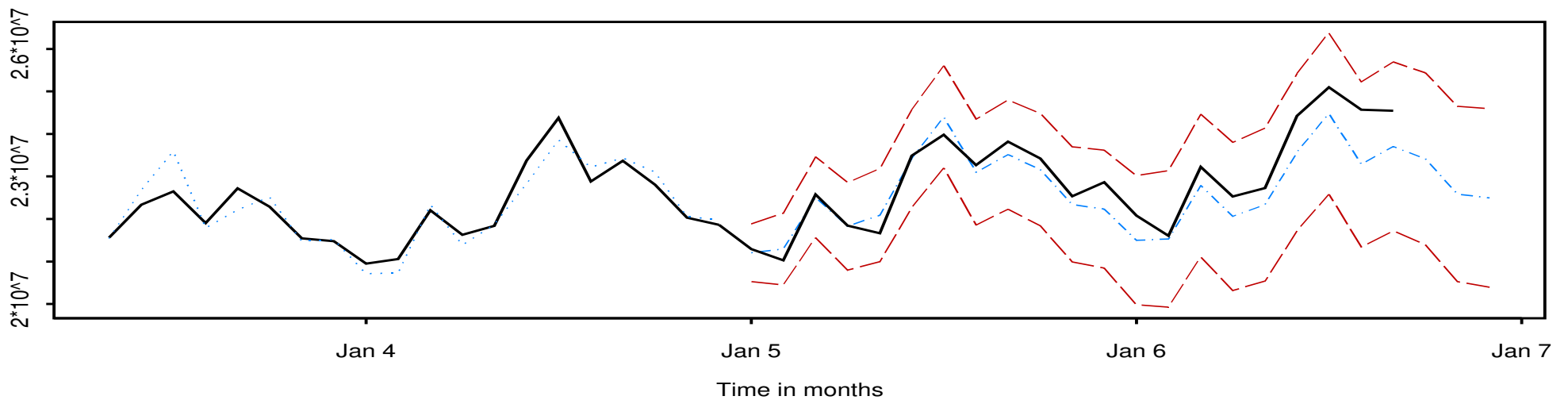
$$y_t = (1 - L)(1 - L^{12})x_t, \quad \text{and} \quad \hat{\sigma} = 3.45 \times 10^5.$$

25 大口電力需要データ（ID50の予測）

Plots of Data, Forecasts, and Forecast Intervals



Enlarged Plots of above



26 大口電力需要データ（まとめ）

- SARFIMA・SARIMA モデルの中で選択されたモデルは SARFIMA モデル。
 - ✍ モデル診断と情報量規準を基にモデル選択を行ったところ最良のモデルは SARIFIMA モデル（ID50）となった。
- 検定結果も SARFIMA モデルを支持した。
 - ✍ 差分パラメータが実数かどうかの検定は有意となった。
- 内挿・予測（外挿）の観点でも ID50 が最もよかった。
 - ✍ SARIMA モデルの中で最良の 3 つのモデルを選び、それぞれと予測の的中率を比較した。ID50 の予測が 8 割以上よかった（21 ヶ月中 17～19 ヶ月の予測で勝った。）