長期記憶時系列の
生成の仕組みと数理

筑波大学システム情報工学研究科
リスク工学専攻
金野　秀敏

1. はじめに

「記憶とは何か？」「記憶は何処から生まれるか？」

自然現象を支配する力学方程式（定数係数）

- リュービル方程式
- ボルツマン方程式（拡散項は無い！）

⇩拡散近似

- 拡散方程式／流体力学方程式(拡散項あり)
- 非線形反応拡散方程式（多変量）
- 熱水力方程式／プラズマ方程式（多変量）

など多数あり

「記憶・記憶関数」の概念は「一見」存在しない

2. 記憶とは

- ２変数（u）と（v）の相互作用

$$\frac{d}{dt}u = f(u) + bv \qquad (1) \qquad\qquad \frac{d}{dt}v = g(u) - cv \qquad (2)$$

（２）式の変数yを形式的に積分すると

$$v(t) = \exp(-ct)v(0) + \int_0^t d\tau \cdot \exp\big(-c(t-\tau)\big)g(u(\tau)) \qquad (3)$$

（１）に代入すると、記憶項が畳み込み積分の形で現れる:

消去した変数の緩和過程が記憶関数となっている

c > 0が大きな値なら、記憶関数exp(-c(t-τ))はデルタ関数δ(t-τ)で近似でき記憶がない方程式に帰着する

３．拡散過程

v(t)が空間d次元拡散過程なら

記憶項は次式で表現される:

$$v(t) \approx \int_{-\infty}^{t} G(r, t-\tau) g(u(\tau)) d\tau$$

拡散過程の緩和関数G(r,t)

$$G(r,t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{d/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right)$$

十分大きな時間で有理数ベキ $t^{-d/2}$ 型の長時間テイルが

相関関数 $\langle u(t+t_0) u(t_0) \rangle$ 等に記憶効果として現れる

簡単な実例（1）有理数ベキ

(1) ブラウン運動（3d）の記憶効果

(2) 密度の高い粒子系の記憶効果

(Alder and Waineright 効果）

相関関数

$$\langle v(t)v(0)\rangle \propto t^{-d/2}$$

(3) 相乗性正規白色雑音$\xi(t)$が印加された

非線形系

$$\frac{d}{dt}x = f(x) + g(x)\cdot\xi(t)$$

$$\langle x(t)x(0)\rangle \propto t^{-1/2}$$

簡単な実例（２）無理数ベキ

- １次元ローレンツ･ガス･モデル

  古典的粒子が固定された散乱体により

  弾性散乱するモデル

$$\langle v(t)v(0)\rangle \propto t^{-(d/2+1)}$$

- 1次元確率的ローレンツ･ガス･モデル

  フラクタル的に分布した不純物（次元D）を

  含むよう拡張したローレンツ･ガス･モデル

$$\langle v(t)v(0)\rangle \propto t^{-([d-D)/2+1)}$$

4. 緩和関数と非整数階微分

一般型:　離散固有値と連続固有値の和

$$G(t) = \sum_{i=1}^{M} a_i \exp(-\lambda_i t) + \int_0^\infty \rho(\lambda)\exp(-\lambda t)\cdot d\lambda$$

粘弾性体の場合の応力 σ とひずみ ε の関係式:

$$\sigma = \int_{-\infty}^{t} G(t-\tau)\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\cdot d\tau$$

経験則(I):　$G(t) = G_0 + G_1\cdot\dfrac{t^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)}$　(fractional Vigot model)

Riemann-Liouville 積分の定義より

$$\sigma = G_0\varepsilon + G_1\frac{\partial^\nu\varepsilon}{\partial t^\nu}$$

$$\frac{\partial^\nu\varepsilon}{\partial t^\nu} = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{(t-\tau)^\nu}\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\cdot d\tau$$

経験則(II) $\sigma(t) + a\frac{\partial^{\nu}\sigma}{\partial t^{\nu}} = b\frac{\partial^{\nu}\varepsilon}{\partial t^{\nu}}$ (fractional Maxwell model)

$$G(t) = \frac{b}{a}E_{\alpha}\left(-\left(\frac{t}{\tau_{\sigma}}\right)^{\alpha}\right)$$

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{\Gamma(\alpha n + 1)}$$ (the Miggag-Leffler function)

$$E_{\alpha}\left(-\left(\frac{t}{\tau_{\sigma}}\right)^{\alpha}\right) = \int_{0}^{\infty} R(\tau)\cdot\exp(-t/\tau)\cdot d\tau$$

$$R_{\sigma}(\tau) = \frac{1}{\pi\tau}\cdot\frac{sin\alpha\pi}{(\tau/\tau_{\sigma})^{\alpha} + (\tau/\tau_{\sigma})^{-\alpha} + 2\cos\alpha\pi}$$

５．緩和現象と非整数ベキ関数

複雑（ランダム）媒質内での緩和

(A型) $$\frac{t^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} = \int_0^\infty \rho(\lambda)\cdot\exp(-\lambda t)\cdot d\lambda$$

(B型) $$\exp\left\{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha\right\} = \int_0^\infty \rho(\lambda)\cdot\exp(-\lambda t)\cdot d\lambda$$

(C型) $$E_\alpha\left\{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha\right\} = \int_0^\infty \rho(\lambda)\cdot\exp(-\lambda t)\cdot d\lambda$$

これらの3つの型が頻繁に用いられている

寿命の数理に出てくるワイブル分布はB型
誘電体の緩和関数(William-Watts関数)もB型

６. 何がフラクタルなのか？

-時間･空間･非線形-

非整数階の時間微分

⇔連続固有値の集積

⇔ベキ型長時間緩和

⇔一般化されたランダムウオーク

疑問:（1） 非整数階空間微分

（2） 非整数次の非線形項

長期記憶の生成との関係は？

複雑な時空構造（不均一性）
グローバル･ローカル相互作用

(1) 不純物分布下のローレンツモデル。。。不純物の分布

(2) アモルファス媒質中での電気伝導。。。トラップ場所分布

(3) 粘弾性体の緩和特性。。。多結晶質媒質／欠陥／不純物

(4) 誘電体の緩和特性。。。多結晶、欠陥、不純物

(5) 巨大生体高分子の緩和特性。。。複雑な原子配置と可塑性

(6) 乱流。。。渦のフラクタル（自己相似）構造、カスケード過程

(7) 非線形力学形。。。アトラクタのフラクタル的島構造

散逸力学系、ハミルトン力学系

(8) 多孔性物質中の流体や固体の運動。。。ランダムな空間構造と可塑性

7. フラクショナル拡散方程式と関連した緩和関数と記憶

(1)時間RL非整数階(I)

$$\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}P(x,t)=\kappa\nabla^2P(x,t)$$

$$0<\beta\le 1$$

(2)時間RL非整数階(II)

$$D_t^{-q}f(t)=\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t d\tau\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-q}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t)=D_t^{1-\alpha}\kappa\nabla^2P(x,t)$$

$$0<\alpha\le 1$$

(3)空間Riesz非整数階

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t)=\kappa\nabla^\mu P(x,t)$$

$$0<\mu\le 2$$

(4) 非整数次非線形項

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t)=\kappa\nabla^2P^\delta(x,t)$$

$$\delta>0$$

8. 他の理論･モデルとの関係

(ア) 連続時間酔歩と（２）は等価(長期記憶あり)

(CTRW) $$\psi(t) = \frac{1}{\tau}\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1} E_\alpha\left(-\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha}\right) \propto t^{-\alpha-1}[t \to \infty]$$

(イ) レビーフライト(Levy flight)と（３）は等価

$$\langle x^2 \rangle \propto t^{1/\mu}$$ (sub/super-diffusion)

(ウ) サリス統計(Tsallis statistics)

確率分布形は一般化コーシ分布と等価

これを与えるFokker-Planck方程式は非線形型（４）

(4) のnonlinear diffusion $$\langle x^2 \rangle \propto t^{1/\delta}$$

(sub/super-diffusion)

(エ) フラクタル格子上の拡散(ブラウン運動)

Sierpinsky gasket $\langle r^2 \rangle \propto t^{2\ln 2/\ln 5}$ (sub-diffusion)

連続時間ランダムウオーク（CTRW）とフラクショナル時間拡散方程式（２）

(a)移流項無し(CTRW):

$$\langle x^2(t)\rangle \propto \frac{2\kappa t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}$$

拡散はsub-diffusionとなる

$$(0<\alpha<1)$$

(b)移流項有り:

$$\langle x^2(t)\rangle \propto \frac{2F^2 t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + \frac{2\kappa t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}$$

(c)調和ポテンシャル存在:

$$\langle x^2(t)\rangle = [\langle x^2(0)\rangle - \langle x^2\rangle_{th}]E_{\alpha}\left(-2\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha}\right)$$

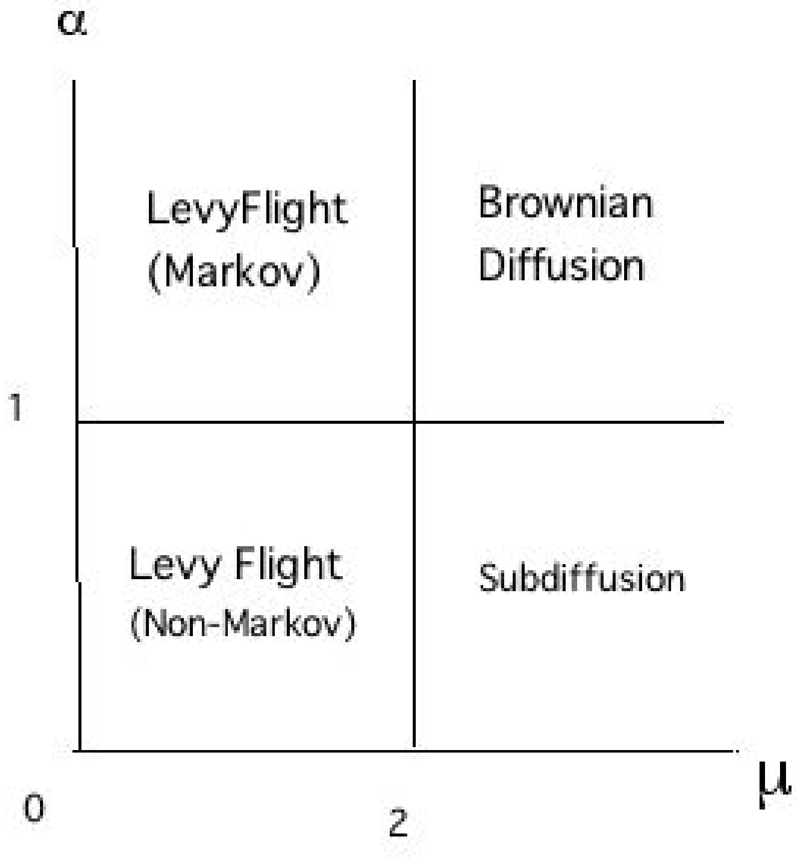
再びMittag-Leffler 関数が現れる

長時間テイルが現れる

時・空間フラクショナル拡散

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) = D_t^{1-\alpha}\kappa\nabla^{\mu}P(x,t)$$

$$\langle x^2\rangle_L = \int_{L_1 t^{1/\mu}}^{L_2 t^{1/\mu}} x^2 P(x,t)dx \approx t^{2\alpha/\mu}$$ (擬似平均自乗変位)



運動の相図

レビー拡散にも
Markov
Non-Markov
の違いがある
ことに注意

9.応用例

（１）メンガースポンジ中の電磁波の閉じ込め
（２）アモルファス誘電体の特性評価
（３）パイプ中の（混相流）乱流（パフ）の予測・制御
（４）粘弾性体の記述と予測・制御
（５）汚染物質の拡散動態評価と予測
（６）生体高分子（蛋白質など）の揺らぎ解析
（７）地球温暖化の解析と予測（矢島先生）
（８）生体時系列解析（山本先生）
（９）経済時系列解析（矢島・片山先生）
（10）インターネット・トラフック解析（阿部先生）

10. 応用上の問題(I)

（１）時間的な不均一性

●間欠性　●トレンドの存在

●時間スケールにより運動法則変わる

●時間に関する変数係数系となっている

定常性の検定／検証必要

（２）空間的な不均一性

●フラクタル構造が均一でない(self-affineでない)

●不均一媒質（空間的な構造が時間的に変化）

例１：乱流の渦構造の時間／空間スケール変化

例２：株取引などにおけるインパクト情報の影響や
　同一の優先傾向グループの変化

11. 応用上の問題(II)

- 自己アフィン性の破れ -

（3）フラクタル次元（D）（局所概念）やハースト指数（H）（大局概念）の時間変動

- 現実にはこれらは時間／空間変動

  D(x, t), H(x, t) 。。。*確率過程*

（4）自己アフィン性 $H + D = d + 1$

- 現実には時間・空間不均一性の影響

  自己アフィン性の破れ $H + D \neq d + 1$

１２．その他のモデル（I）

Fractional Klein-Kramers Equation

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t)+v\frac{\partial P}{\partial v}+F(x)\frac{\partial P}{\partial v}=D_t^{1-\alpha}L_{FP}P(x,t)$$

Master Equation（多変量）

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\vec{x},t)=\int[W_t(\vec{x}\,|\,\vec{y})P(\vec{y},t)-W_t(\vec{y}\,|\,\vec{x})P(\vec{x},t)]d\vec{y}$$

$W(\vec{y}\,|\,\vec{x})$ =多変量マルコフ遷移確率

１２．その他のモデル(II)

Fractional Generalized Cauchy Equation

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) = D_t^{1-\alpha} L_{FP} P(x,t)$$

$$L_{FP} = \frac{\partial}{\partial x}\{K(x)\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\{D(x)\}$$

$$K(x) = \alpha x \qquad D(x) = (D_p x^2 + D_a)$$

$$P_s(x) = \frac{a^{2b-1}}{B(b-1/2, 1/2)} \cdot \frac{1}{(x^2 + a^2)^b}$$

$$a^2 = \frac{D_a}{D_p} \qquad b = \frac{\alpha}{2D_p} + \frac{1}{2}$$

13. まとめ

リュービル方程式 $$\frac{d}{dt}A(t) = iLA(t)$$

↓　線形射影

記憶関数型のランジュバン方程式　（森／久保の理論）

$$\frac{d}{dt}A(t) = i\Omega A(t) - \int_0^t \Phi(t-u)A(u)du + f(t)$$

記憶関数

$$\Phi(t) = \frac{\langle f(t) f^*(0) \rangle}{\langle A(0)A^*(0) \rangle}$$

揺動散逸定理

揺動力に拡散過程などの影響が畳込まれる

長期記憶時系列の生成

数多くの連続固有値が集積した関数のうちで取り扱いやすいものが使われている

$$\frac{t^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} = \int_0^\infty \rho(\lambda)\cdot\exp(-\lambda t)\cdot d\lambda$$

$$\exp\left\{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha}\right\} = \int_0^\infty \rho(\lambda)\cdot\exp(-\lambda t)\cdot d\lambda$$

$$E_\alpha\left\{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha}\right\} = \int_0^\infty \rho(\lambda)\cdot\exp(-\lambda t)\cdot d\lambda$$

非線形項や非均質を陽に取り込んだモデル化や解析

実験データの多面的な解析が必要

文献

[1] 杉本信正、非整数階微分・積分とその応用、ながれ 4 (1985) 110-120.

[2] K. B. Oldham and J. Spanier: The Fractional Calculus (Academic, 1974).

[3] K. Ohbayashi, T. Kohno and H. Uchiyama: Phys. Rev. A27 (1983) 2632-2641.

[4] H. Mori: Progr. Theor. Phys. 33 (1965) 423-455.

[5] H. Takayasu and K. Hiramatsu: Phys. Rev. Lett. 53 (1984) 633-636.

[6] Eds. A. Carpinteri and F. Mainardi: Fractals and Fracional Calculus in Continuum Mechanics (Springer, 1997).

[7] M. Riesz: Acta Math. 81 (1949) 1-223.

[8] Ed. R. Hilfer: Applications of Fractional Calculus in Physics (World Scientific, 2000)

[9] I. M. Sokolov, J. Klafter and A. Blumen: Fractional Kinetics, Physics Today, November (2002) 48-54.

[10] E. Montroll and M. F. Schlesinger: On the Wonderful World of Random Walks, Nonequilibrium Phenomena II, From Stochastics to Hydrodynamics, (NorthHolland,Amsterdam,1984).

[12] J. D. Meiss and E. Ott: Physica D20 (1986) 387-402.

[13] G. M. Zaslavsky: Physica D76 (1994) 110-122.

[14] J. Klafter, M. F. Shlesinger and G. Zumofen: Beyond Brownian Motion, Physics Today, February (1996) 33-39.

[15] B. Manderblot: The Fractal Geometry of Nature, Freeman, San Fransisco (1982).

[16] B. Manderbrot: Gaussian Self-Affinity and Fractals, Springer, NY (2002).

[17] J. P. Chiles and P. Delfiner: Geostatistics, Wiley, NY (1999).

[18] 山口昌哉ほか，フラクタルの数理，岩波講座　応用数学, 岩波，東京 (1993)

[19] J. P. Bouchaud and A. Georges: Anomalous Diffusion in Disordered Media, Statistical Mechanics, Models and Applications, Physics Report 195 (1990) 127-293.