

長期記憶時系列 その統計推測理論と応用

矢島美寛

東京大学大学院経済学研究科

内容

- 時系列解析とは
- 時系列解析の歴史
- 長期記憶を持つデータ・その特徴
- 長期記憶定常モデルの定義
- 代表的な長期記憶モデル
- 推定法・検定法
- 予測方法
- 今後の発展について (私見)

時系列解析とは

- 時系列データを確率過程の実現値とみなす
- データに適合する確率モデルの構築 ← 統計科学的手法の応用
- 予測・制御・因果関係の検出（多変量時系列の場合）

時系列解析の歴史

(1)20 世紀中葉から 1970 年代

- 自己回帰移動平均モデルに代表される線形短期記憶モデル
- cf.Box and Jenkins(1970)
- 欠点 強い系列相関、非対称性・突然の変化などの非線形性に対応できない

(2)1980 年代から現在

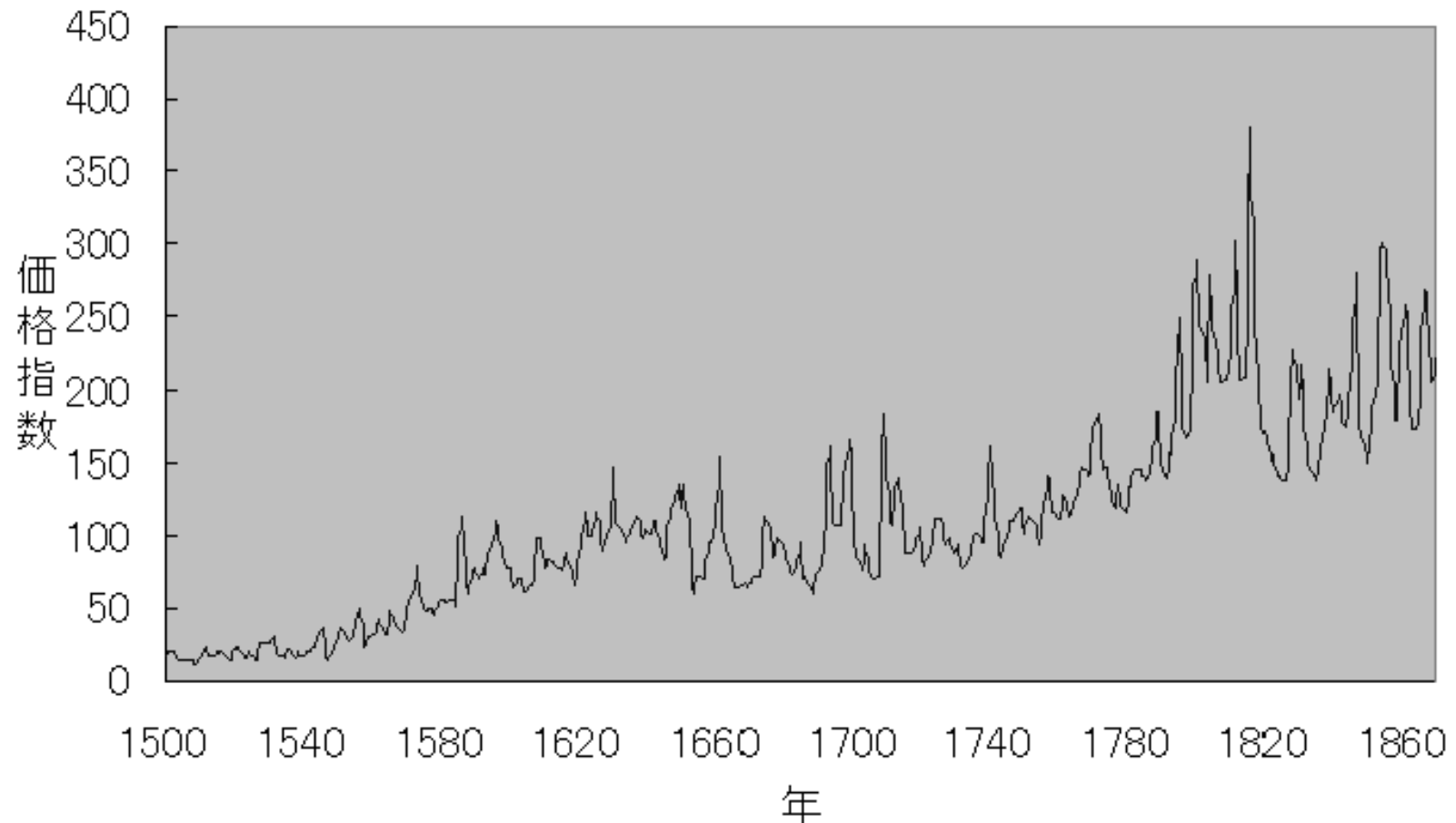
非線形性、長期記憶性、非定常性に有効なモデルの開発

長期記憶を持つデータ

- 乱流 Kolmogorov(1940),(1941)
- 経済学 低周波が優勢な時系列データ Granger(1966)
- 水文学 河川の流量 Hurst(1951) Hurst 効果
- 他にもいろいろ

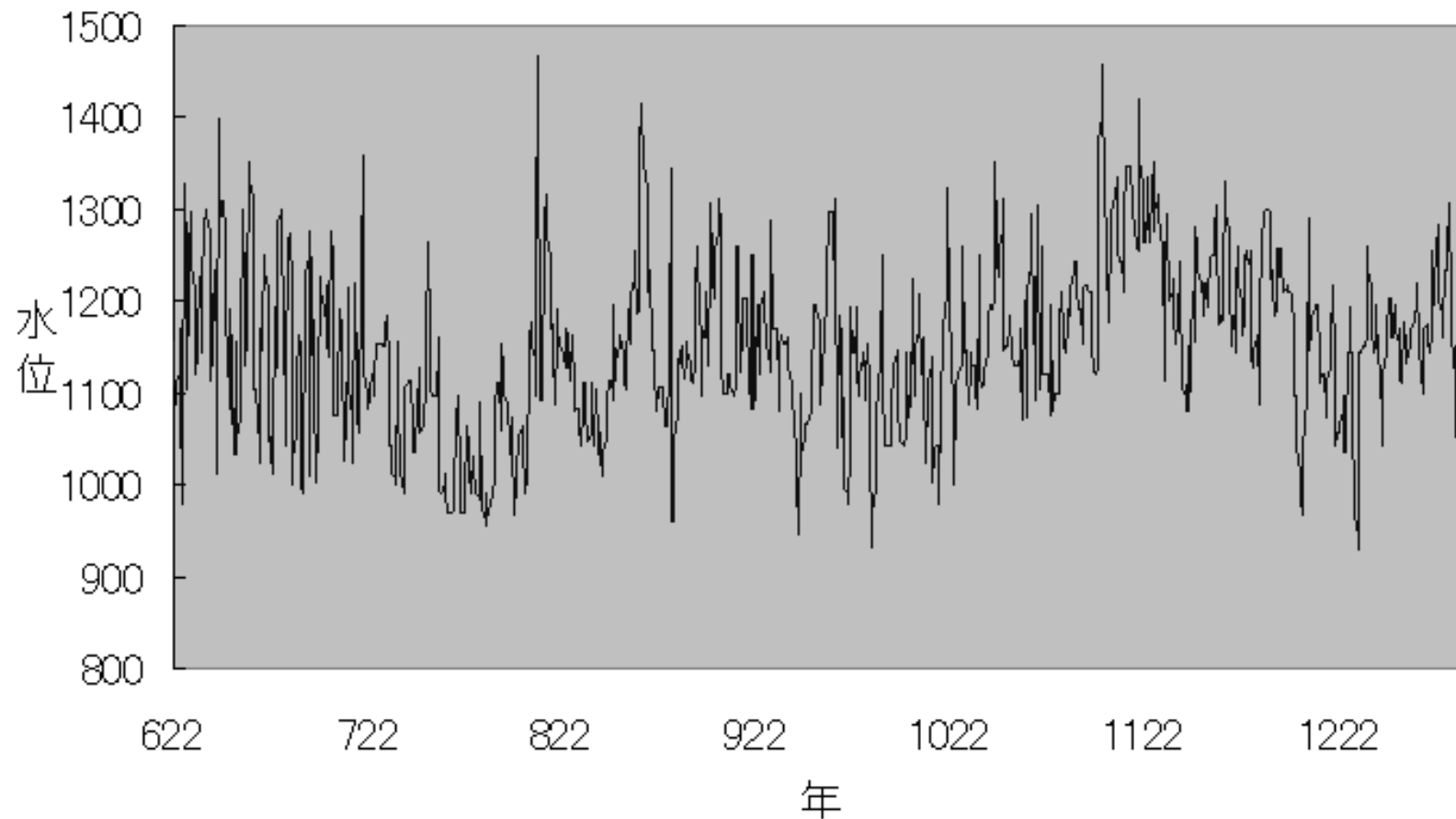
Beveridge Wheat Prices Index

図1.12(a) Beveridgeの小麦価格指数



Nile River Water Level

図1.3 ナイル川の最小水位622-1284



長期記憶を持つデータの特徴

- 大きい（小さい）値をとる期間が長期に継続
- 局所的には確定的に見えるトレンドや周期性を示す 全体的には確率的な変動
- 自己相関関数の減衰が緩慢 但し個々の相関係数は必ずしも大きくない
- スペクトル密度関数は原点の近傍（低周波）で大きくなり、高周波で小さい

(弱)定常過程

定義

$\{X_t | t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$: 確率過程

(i) $\{X_t\}$ の期待値は時点 t に依存せず一定の値 $E(X_t) = \mu$ (以下簡単のため $\mu = 0$)

(ii) $Cov(X_t, X_s)$ は時間差 $t - s$ のみに依存
自己共分散 (相関) 関数

$$\gamma(h) = Cov(X_{t+h}, X_t) : \text{Autocovariance Function}$$

$$\rho(h) = \gamma(h) / \gamma(0) : \text{Autocorrelation Function}$$

(弱) 定常過程

スペクトル分布 (密度) 関数

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp(ih\lambda) dF(\lambda)$$

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp(ih\lambda) f(\lambda) d\lambda : \text{Absolutely Continuous}$$

短期(長期)記憶定常過程

短期記憶 (短期依存あるいは弱従属) 定常過程

$$\sum_{h=0}^{\infty} |\rho(h)| < \infty$$

長期記憶 (長期依存あるいは強従属) 定常過程

$$\sum_{h=0}^{\infty} |\rho(h)| = \infty$$

代表的な短期記憶モデル

ARMA(p, q) モデル・定義

$$\begin{aligned} X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} \\ = U_t - \theta_1 U_{t-1} - \dots - \theta_q U_{t-q} \end{aligned}$$

ここで

$\{U_t | t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$: White Noise

$$\text{Var}(U_t) = \sigma^2, \text{Cov}(U_t, U_s) = 0, t \neq s$$

ARMA モデルの別表現

$$\phi(B)X_t = \theta(B)U_t$$

ここで

$$BX_t = X_{t-1} : \text{Backward Shift Operator}$$

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$$

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$$

ARMA モデルの性質

Autocorrelation Function

$$|\rho(h)| \leq K a^{|h|} (0 < a < 1) \forall h : \text{Exponential Decay}$$

Spectral Density Function

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|\theta(e^{i\lambda})|^2}{|\phi(e^{i\lambda})|^2} : \text{Analytic Function}$$

滑らかな無限回微分可能な関数

ARIMA(p, d, q) モデル (非定常モデル)

$$\phi(B)\nabla^d X(t) = \theta(B)U_t$$

ここで

$$\nabla X_t = (1 - B)X_t = X_t - X_{t-1} : \text{Difference Operator}$$

$$\nabla^d = (1 - B)^d = \sum_{j=0}^d \binom{d}{j} (-B)^j \quad (d = 2, 3, \dots)$$

注意

$$\{\nabla^d X_t\} : \text{Stationary ARMA}(p, q)\text{ Model}$$

代表的な長期記憶モデル1

ARFIMA(p, d, q) モデル・定義

$$\phi(B)\nabla^d X(t) = \theta(B)U_t \quad d : \text{Any Real Number}$$

$$\nabla^d = (1 - B)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{d}{j} (-B)^j$$

Fractional Difference Operator

$$\begin{aligned} \binom{d}{j} &= \frac{d(d-1)\dots(d-j+1)}{(j(j-1)\dots 1)} \\ &= \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(d-j+1)} \end{aligned}$$

代表的な長期記憶モデル1

特徴

$d < 1/2 \Rightarrow \text{ARFIMA}(p, d, q): \text{Stationary Process}$

Spectral Density Function

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|\theta(e^{i\lambda})|^2}{|\phi(e^{i\lambda})(1 - e^{i\lambda})^d|^2}$$

特徴

$$f(\lambda) \rightarrow \infty \text{ as } \lambda \rightarrow 0 \quad (0 < d < 1/2)$$

代表的な長期記憶モデル2

Fractional Brownian Motion $\{B_H(t)|0 \leq t < \infty\}$:正規確率過程

$$E(B_H(t)) = 0 \forall t$$

$$E(|B_H(t) - B_H(s)|^2) = \sigma^2 |t - s|^{2H} (0 < H < 1)$$

注意 $H = 1/2 \Rightarrow$ Brownian Motion

Fractional Gaussian Noise $\{X_t|t = 1, 2, \dots\}$:定常過程

$$X_t = B_H(t) - B_H(t - 1)$$

両長期記憶モデルの特徴

$$f(\lambda) \sim |\lambda|^{\alpha-1} \quad (\lambda \rightarrow 0)$$

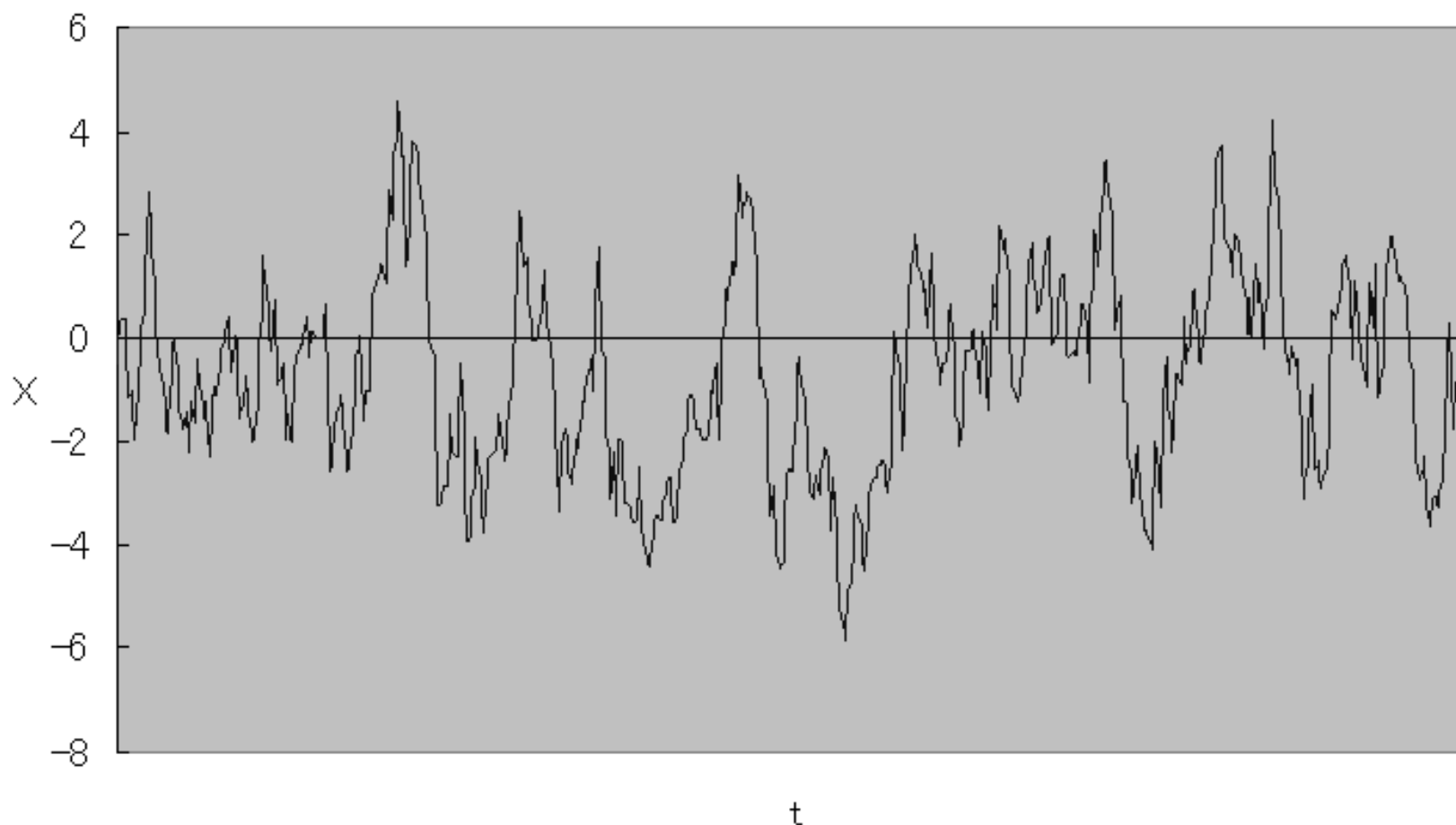
$$\rho(h) \sim h^{-\alpha} \quad (h \rightarrow \infty)$$

ここで

$$\alpha = 1 - 2d = 2 - 2H$$

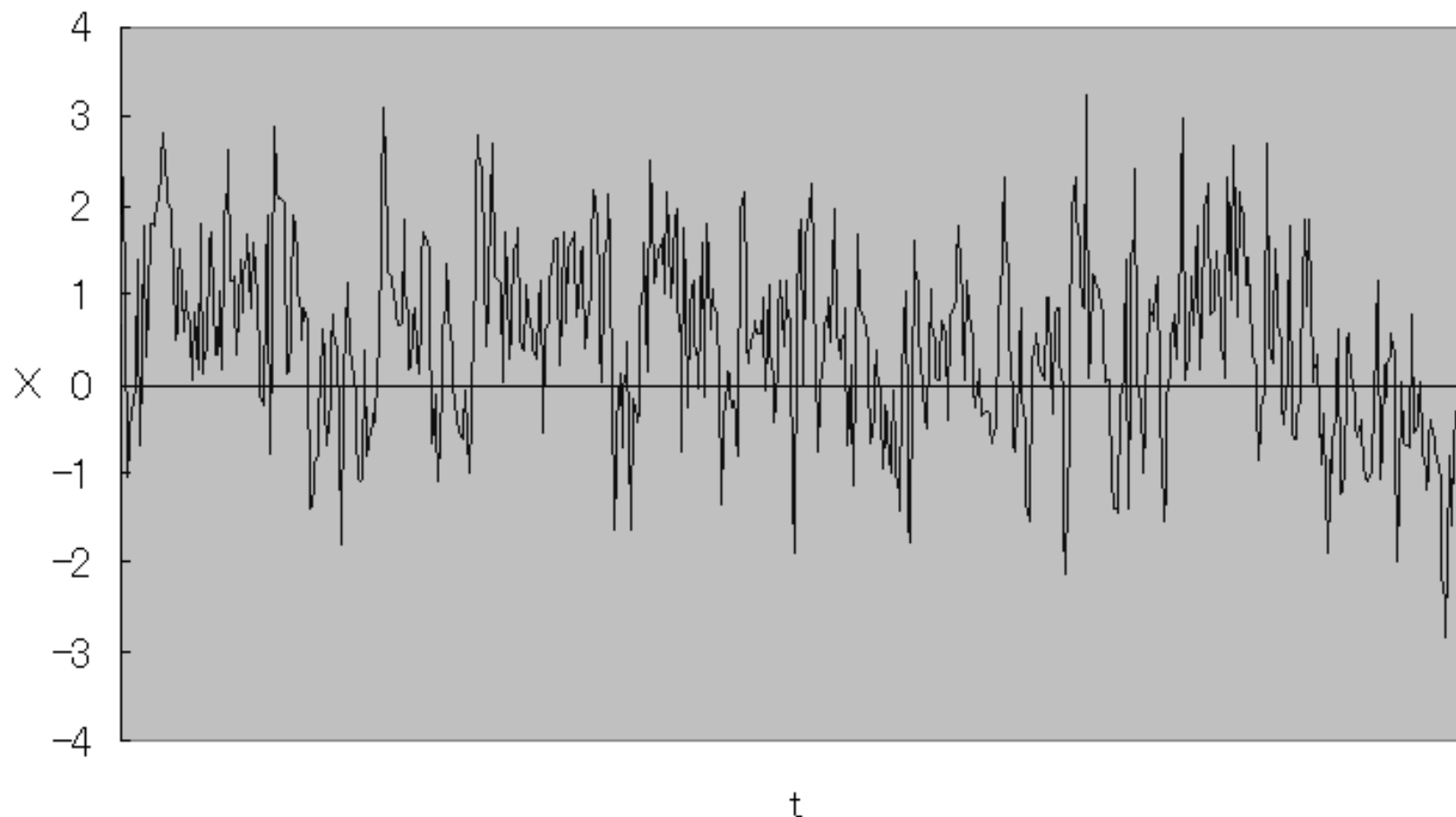
AR Model

図1.10(a)AR(1)モデル $\phi_1=0.9$



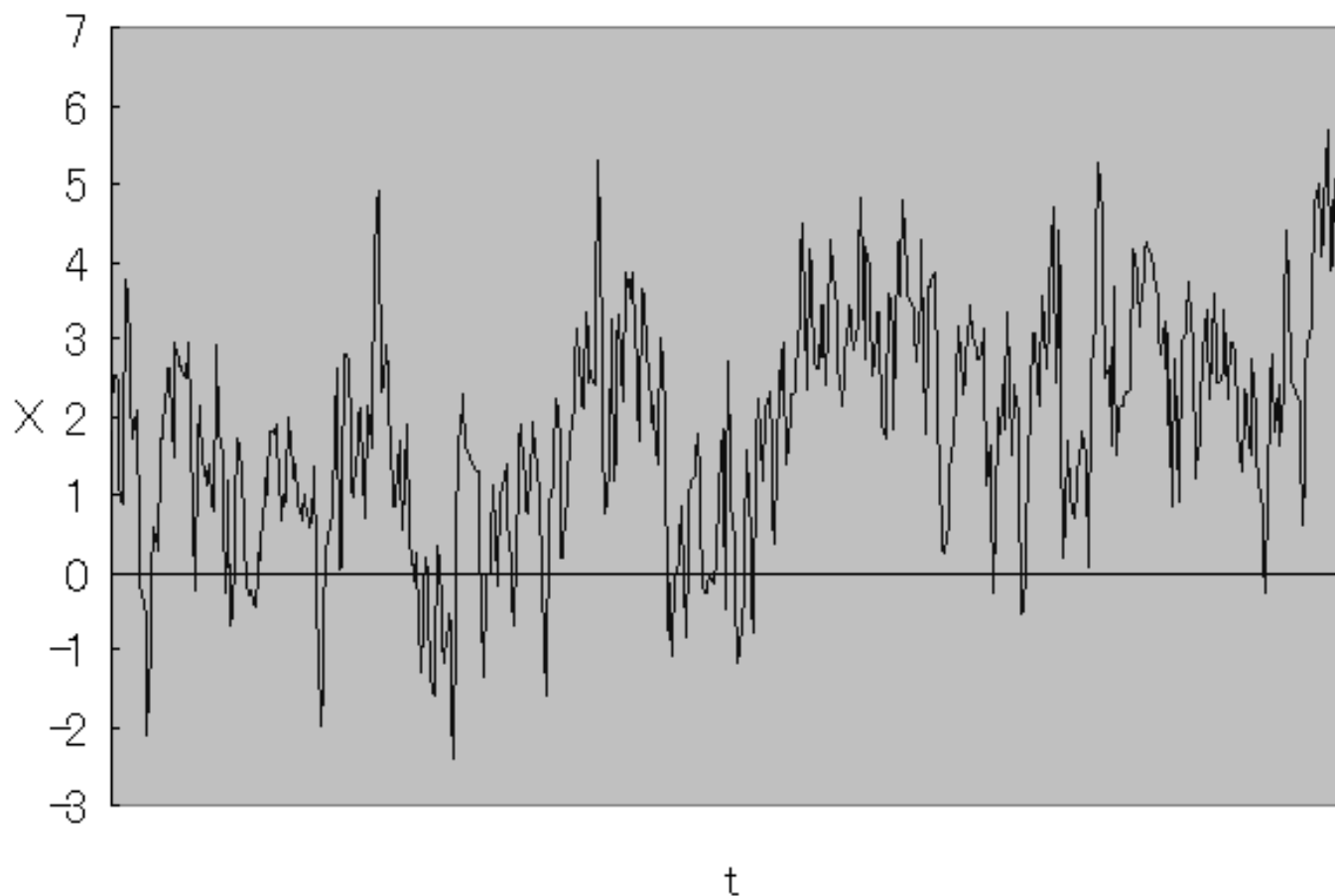
ARFIMA Model

図1.8(b) ARFIMA モデル $d=0.25$



ARFIMA Model

図 8.6 ARFIMA モデル $d=0.49$



パラメトリック推定法 (例.ARFIMA)

$\mathbf{X}_n = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$: Observations

$\boldsymbol{\beta} = (d, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q), \sigma^2$: Parameters

1. 最尤推定量 (尤度関数)

$$L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} |\Gamma_n(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2)|^{-1/2} \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{X}'_n \Gamma_n^{-1}(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) \mathbf{X}_n\right)$$

$\Gamma_n(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2)$: $n \times n$ Covariance Matrix

$$(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\sigma}^2) = \arg_{\boldsymbol{\beta}, \sigma^2} L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2)$$

パラメトリック推定法

2. Whittle 推定量 (対数尤度関数の近似)

$$U_n(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = -\frac{1}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\lambda_j \in (-\pi, \pi)} \frac{2\pi I_n(\lambda_j)}{ng(\lambda_j; \boldsymbol{\beta})}$$

ここで

$$f(\lambda; \boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{2\pi} g(\lambda; \boldsymbol{\beta})$$

$$I_n(\lambda) = \frac{|\sum_{t=1}^n X_t e^{-it\lambda}|^2}{2\pi n} : \text{Periodogram}$$

$$\lambda_j = 2\pi j/n : \text{Fourier Frequency}$$

Whittle 推定量

$$\tilde{\beta}, \tilde{\sigma}^2 = \arg \beta, \sigma^2 U_n(\beta, \sigma^2)$$

注意

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \log \sigma^2 &\approx -\frac{1}{2} \log |\Gamma_n(\beta, \sigma^2)|/n \\ -\frac{1}{2} \mathbf{X}'_n \Gamma_n^{-1}(\beta, \sigma^2) \mathbf{X}_n &\approx -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\lambda_j \in (-\pi, \pi)} \frac{2\pi I_n(\lambda_j)}{ng(\lambda_j; \beta)} \end{aligned}$$

理論的性質

定理

- (i) $n \rightarrow \infty$ のとき両推定量ともに強一致推定量 (真値に概収束)
- (ii) $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta, \hat{\sigma}^2 - \sigma^2)$ の極限分布は多変量正規分布。Whittle 推定量も同様で、両推定量の共分散行列は等しい。

注意

有限標本の場合、期待値が既知の場合は最尤推定量の方が Whittle 推定量より平均二乗誤差が小さい。期待値が未知の場合は遜色がない。

セミパラメトリック推定法

パラメトリック vs セミパラメトリック

(1) パラメトリック

- 長所 モデルが正しければ Efficient な推定量
- 短所 モデルの特定化の誤り → 一致推定量ではない

(2) セミパラメトリック

- 長所 Robust な推定量
- 短所 Efficient な推定量ではない

セミパラメトリック推定法

(1) ナローバンド推定量 仮定

$$f(\lambda) = C\lambda^{-2d} + o(\lambda^{-2d}) \quad \lambda \rightarrow 0$$

$d < 1/2, C : \text{Positive Constant}$

アイディア

- (i) $f(\lambda) = C\lambda^{-2d}$ が $\lambda = 0$ の近傍で成立すると見なす.
- (ii) $f(\lambda_j)$ に $I_j (= I(\lambda_j))$ を代入. ただし $0 < j \leq m$
- (iii) $n \rightarrow \infty$ のとき $m/n \rightarrow 0$ とする. ($\lambda = 0$ の近傍の I_j のみ使用)

ナローバンド推定量

(i) 平滑化ピリオドグラム法

以下の式に注目する.

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_0^\lambda f(\omega) d\omega \sim C \int_0^\lambda \omega^{-2d} d\omega \\ &= \frac{C}{1-2d} \lambda^{1-2d} \end{aligned}$$

したがって任意の $q(> 0)$ に対して,

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\log(F(q\lambda)/F(\lambda))}{\log q} \right) \sim \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(1-2d)\log q}{\log q} \right) = d$$

平滑化ピリオドグラム法

$$\hat{d}_{AVE} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\log(\hat{F}(q\lambda_m)/\hat{F}(\lambda_m))}{\log q} \right)$$

$$\hat{F}(\lambda) = \frac{2\pi}{n} \sum_{j=1}^{[n\lambda/2\pi]} I_j$$

ナローバンド推定量

(ii) 対数回帰法 回帰モデル

$$\begin{aligned}\log I_j &= \log f(\lambda_j) + \log \left(\frac{I_j}{f(\lambda_j)} \right) \\ &\sim \log C - 2d \log \frac{2\pi j}{n} + \log \left(\frac{I_j}{f(\lambda_j)} \right) \\ &= (\log C - \eta) - 2d \log \frac{2\pi j}{n} + U_j \\ \eta &= 0.577216 \dots \text{(Euler's Constant)} \\ U_j &= \log \left(\frac{I_j}{f(\lambda_j)} \right) + \eta \text{(Error Terms)}\end{aligned}$$

対数回帰法

最小二乗推定量

$$\hat{d}_{LOG} = -\frac{1}{2} \frac{\sum_{j=l}^m \log I_j (\log j - \frac{1}{m-l+1} \sum_{i=l}^m \log i)}{\sum_{j=l}^m (\log j - \frac{1}{m-l+1} \sum_{i=l}^m \log i)^2}$$

注意 λ_m (上限), $\lambda_l (< \lambda_m)$ (下限)

ナローバンド推定量

(iii) 局所 Whittle 法

$$R(d) = \log \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \lambda_j^{2d} I_j \right) - \left(\frac{2d}{m} \sum_{j=1}^m \log \lambda_j \right) \quad (1)$$

$$\hat{d}_{GAU} = \arg_d R(d)$$

ナローバンド推定量

(iv) 加重積分法

$$d = h_w(\bar{\lambda}^{-1} \int_0^{\bar{\lambda}} w(\bar{\lambda}^{-1} \lambda) \log f(\lambda) d\lambda$$

$$- (\bar{\lambda}^{-1} \log f(\bar{\lambda}) \int_0^{\bar{\lambda}} w(\bar{\lambda}^{-1} \lambda) d\lambda)$$

$w(u) (0 \leq u \leq 1)$: (Positive Weight Function)

$$h_w = (-2 \int_0^1 w(u) \log(u) du)^{-1}$$

加重積分法

$\bar{\lambda} = \lambda_k$ とおき, 積分を和で近似.

$$\tilde{d} = h_w \left(\frac{1}{k} \sum_{p=1}^k w_p \log \hat{f}_p - \left(\frac{1}{k} \sum_{p=1}^k w_p \right) \log \hat{f}_{k+1} \right)$$
$$w_p = w(p/k)$$

$$\hat{f}_p = \hat{f}(\lambda_p) = \begin{cases} \frac{1}{m+1} \sum_{j=-m/2}^{m/2} I_{j+p} & \text{if } m < 2p \\ \frac{2}{m} \sum_{j=1}^{m/2} I_{j+p} & \text{if } 0 < 2p \leq m \end{cases}$$

加重積分法

さらに平滑化して, 加重平均をとる.

$$\hat{d}_{WIN} = \bar{v}^{-1} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^p v_p \tilde{d}_p$$

$$\tilde{d}_p = h_w \left(\frac{1}{p} \sum_{l=1}^p w_l \log \hat{f}_l - \left(\frac{1}{p} \sum_{l=1}^p \right) \log \hat{f}_{p+1} \right)$$

$$w_l = w(l/p), \quad v_p = v(p/m), \quad \bar{v} = m^{-1} \sum_{p=1}^m v_p$$

$v(u) (0 \leq u \leq 1)$: Positive Weight Function

シミュレーション(セミパラ)

Hidalgo and Yajima(2002.Ann.Inst.Statist.Math.)

Table 1: Bias of The Estimators($d = 0.4$)

Sample Size	$n = 128$	$n = 256$
Bandwidth	$m = 16$	$m = 32$
AVE	-.125	-.100
LOG	.019	.017
GAU	-.030	-.007
WIN	-.084	-.029

シミュレーション (続き)

Hidalgo and Yajima(2002.Ann.Inst.Statist.Math.)

Table 2: Standard Deviation of The Estimators($d = 0.4$)

Sample Size	$n = 128$	$n = 256$
Bandwidth	$m = 16$	$m = 32$
AVE	.109	.065
LOG	.216	.137
GAU	.138	.094
WIN	.112	.084

シミュレーション (続き)

Hidalgo and Yajima(2002.Ann.Inst.Statist.Math.)

Table 3: MSE of The Estimators($d = 0.4$)

Sample Size	$n = 128$	$n = 256$
Bandwidth	$m = 16$	$m = 32$
AVE	.028	.014
LOG	.047	.019
GAU	.020	.009
WIN	.020	.008

シミュレーション (結論)

Hidalgo and Yajima(2002.Ann.Inst.Statist.Math.)

- Bias は \hat{d}_{LOG} が小さい
- MSE は \hat{d}_{GAU} , \hat{d}_{WIN} が小さい

ブロードバンド推定量

仮定

$$f(\lambda) = |1 - \exp(i\lambda)|^{-2d} f^*(\lambda)$$

$f^*(\lambda)$: Positive Continuous Function

対数変換

$$\log f(\lambda) = (-2d) \log |1 - \exp(i\lambda)| + \log f^*(\lambda)$$

$$\log f^*(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j h_j(\lambda) : \text{Fourier Expansion}$$

$$h_0(\lambda) = 1/\sqrt{\pi}, \quad h_j(\lambda) = \cos(j\lambda)/\sqrt{\pi} (j = 1, 2, \dots)$$

$\log f^*(\lambda)$ のフーリエ展開を有限次数 p で近似.

ブロードバンド推定量(続き)

対数回帰法をすべてのフーリエ周波数 λ_j (ブロードバンド) に適用する. サンプル数 n が大きくなるとともに, p も増やしていく.

検定方法 (例. 単位根検定)

従来の仮説検定 (2 分法)

$$H_0 : d = 0 \text{ vs } H_1 : d = 1$$

長期記憶性を考慮した仮説検定

$$H_0 : d = 0 \text{ vs } H_1 : d \neq 0$$

セミパラメトリック検定. 検定統計量 (ラグランジュ未定乗数法型)

$$LM = m \left(\frac{\partial R(d)}{\partial d} \Big|_{d=0} \right)^2 / \left(\frac{\partial^2 R(d)}{\partial d^2} \Big|_{d=0} \right)$$

ここで $R(d)$ は局所 Whittle 法における目的関数. 帰無仮説のもとで極限分布は自由度 1 の χ^2 分布.

実際例 (Lobato and Robinson)

為替. ポンド (BP), マルク (DM), 円 (JY) vs. ドル (1974.1-1985.6)

Table 4: Unit Root Test(*: 5% Significant)

Log Difference Data			
m	BP	DM	JY
20	2.039	0.164	0.330
40	3.283	0.662	0.042
60	4.372*	0.036	0.029
80	9.987*	0.201	2.833
100	8.185*	1.719	2.429

実際例(続き)

Table 5: Unit Root Test(*: 5% Significant)

Squared Log Difference Data

m	BP	DM	JY
20	9.457*	3.332	3.135
40	12.830*	10.005*	10.710*
60	19.029*	32.333*	26.771*
80	24.045*	62.196*	24.153*
100	32.199*	100.356*	13.852*

実際例(続き)

注意 2 乗データに対して棄却されるものが多い. 長期記憶の可能性 (?)

予測方法

理論的予測 (モデル・パラメータ既知の場合)

Wiener-Kolmogorov 理論として既に確立

実際上の問題点

- モデル特定化の誤り
 - ARFIMA モデルの個々の自己相関は小さい場合有り
→ARMA モデルをフィット
 - どのモデル選択規準を用いるか？ ex.AIC,BIC,etc
- 推定量の精度・安定性. ex.AR モデルは線形連立方程式を解けばよい
- 短期予測 vs 長期予測
- データ数

Wiener-Kolmogorov 理論

過去のデータが無限個の場合

$$X_{n+h} (0 < h) \stackrel{\text{Prediction}}{\Longleftarrow} X_n, X_{n-1}, \dots$$

$MA(\infty)$ 表現

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j U_{t-j}$$

$AR(\infty)$ 表現

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j} = U(t)$$

Wiener-Kolmogorov 理論 (続き)

最良予測量 (最小平均二乗誤差予測量)

$$\begin{aligned}\hat{X}_n(h) &= - \sum_{j=1}^{h-1} \pi_j \hat{X}_n(h-j) \\ &\quad - \sum_{j=h}^{\infty} \pi_j X_{n+h-j}\end{aligned}$$

Recursive Formula

予測誤差

$$E[(X_{n+h} - \hat{X}_n(h))^2] = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2$$

Wiener-Kolmogorov 理論 (続き)

過去のデータが有限個の場合

$$X_{n+h} (0 < h) \stackrel{\text{Prediction}}{\longleftarrow} X_n, X_{n-1}, \dots, X_1$$

(1) 打ち切り法 ($X_t = 0, t < 0$ とする.)

$$\begin{aligned} X_n^*(h) &= - \sum_{j=1}^{h-1} \pi_j \hat{X}_n(h-j) \\ &\quad - \sum_{j=h}^{n+h-1} \pi_j X_{n+h-j} \end{aligned}$$

Wiener-Kolmogorov 理論 (続き)

(2) 最良予測量

$$\hat{X}_n(h) = - \sum_{j=1}^{n-1} \pi_j(h) X_{(n+1-j)}$$

$$P_n \Pi = p_n$$

$$P_n = [\rho(i-j)] : n \times n \text{ Autocorrelation Matrix}$$

$$\Pi = (\pi_1(h), \dots, \pi_n(h))', \quad p_n = (\rho(h), \dots, \rho(n+h-1))'$$

実際の予測方法 (例.ARFIMA モデル)

過去のデータが有限個の場合

Type 1 法 (d を推定しない)

(a) 直接法 AR(MA) モデルを当てはめ, h ごとに最良予測量の係数 $\pi_j(h)$ を推定.

(b) Plug-In 法 AR(MA) モデルを当てはめ $h = 1$ から始めて巡回的方法 (たとえば Innovation Algorithm) で $h = 2, 3, \dots$ に対する最良予測量の係数 $\pi_j(h)$ を推定.

Type 2 法 (d を推定する)

(a) 直接法 ARFIMA モデルを当てはめ, h ごとに最良予測量の係数 $\pi_j(h)$ を推定.

(b) Plug-In 法 ARFIMA モデルを当てはめ $h = 1$ から始めて巡回的方法で $h = 2, 3, \dots$ に対する最良予測量の係数 $\pi_j(h)$ を推定.

予測精度の比較例 (直接法)

真のモデル ARFIMA($p, d, 0$)(過去のデータ有限個)

シミュレーションによる比較

(i) N. Crato and B. K. Ray (1996)

基準

$$\begin{aligned} & \text{MSE}(h_1 - h_2) \\ = & \frac{\sum_{i=h_1}^{h_2} (\hat{X}_n^{ARMA}(i) - X_{n+i})^2 - \sum_{i=h_1}^{h_2} (\hat{X}_n^{ARFIMA}(i) - X_{n+i})^2}{\sum_{i=h_1}^{h_2} (\hat{X}_n^{ARFIMA}(i) - X_{n+i})^2} \end{aligned}$$

ここで $\hat{X}_n^{ARMA}(i)$ ($\hat{X}_n^{ARFIMA}(i)$) は各モデルに基づく最良予測量の真の係数に推定量を代入した予測量.

予測精度の比較例(直接法.続き)

(2) J. Brodsky and C. M. Hurvich (1999)

基準

$$(\hat{X}_n^{ARFIMA}(h) - X_{n+h})^2 / \text{MMSE} \text{ vs } (\hat{X}_n^{ARMA}(h) - X_{n+h})^2 / \text{MMSE}$$

ここで MMSE は真のモデル (ARFIMA) による平均二乗誤差の理論値

予測精度の比較例(直接法.続き)

Table 6: Crato and Ray($p = 1, d = 0.3, \phi = 0.65$ %)

Sample size	Lead Time	AIC	AICc	SIC
$n = 120$	1-6	16.61	16.43	13.26
	13-24	21.07	21.07	20.27
	25-36	11.23	11.30	11.27
$n = 360$	1-6	6.70	6.43	6.52
	13-24	10.87	10.99	10.56
	25-36	12.88	12.93	13.36

予測精度の比較例(直接法.続き)

Table 7: Brodsky and Hurvich($p = 0, d = 0.45, n = 100$)

Lead Time	ARFIMA	ARMA(1,1)
2	0.98	1.03
4	1.04	1.07
10	1.04	1.10
15	0.97	1.09
20	1.02	1.10
40	1.09	1.25

予測精度の比較例 (結論)

- d がに近いときかつ短期予測では ARMA に基づく予測量も遜色ない
- d が大きくなるにつれてかつ長期予測では真のモデル (ARFIMA) に基づく予測量が優れている

今後の発展方向(私見)

- 金融データ解析への応用
- 差分分析への一般化 (差分の回数 d を整数から実数へ一般化)
- 時空間データ解析への一般化 (X_t のパラメータ t をスカラーからベクトルへ一般化)

共和分分析

$\mathbf{X}_t = (X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{pt})'$ (p 次元多変量時系列)

仮定

各成分時系列 X_{it} ($i = 1, \dots, p$) は $I(d)$ 過程 (Integrated process of order d)

定義

あるノンゼロ・ベクトル $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)'$ が存在して, 1変量時系列 $\beta' \mathbf{X}_t$ が $I(d-b)$ ($b > 0$) 過程 ($d = b$ ならば定常過程) にしたがる.

β を共和分ベクトル, 一次独立な共和分ベクトルの個数を共和分ベクトル空間の階数という.

共和分分析

例. 購買力平価説

P_{it} , $i = 0, 1$: アメリカ合衆国、日本の物価指数, E_t : 為替レート (円/ドル)

$$\nu_t = E_t \times \frac{P_{0t}}{P_{1t}}$$

$$\log \nu_t = \log E_t + \log P_{0t} - \log P_{1t}$$

このとき $p = 3$, $\mathbf{X}_t = (\log E_t, \log P_{0t}, \log P_{1t})'$ とおけば, \mathbf{X}_t には, $\beta = (1, 1, -1)'$ を共和分ベクトルとする $d = b = 1$ の共和分が存在?

共和分分析(分析方法)

1st Step

$X_{it}(i = 1, \dots, p)$ を d_i が等しいグループに分割 (従来の共和分分析では明確に意識していない?).

2nd Step

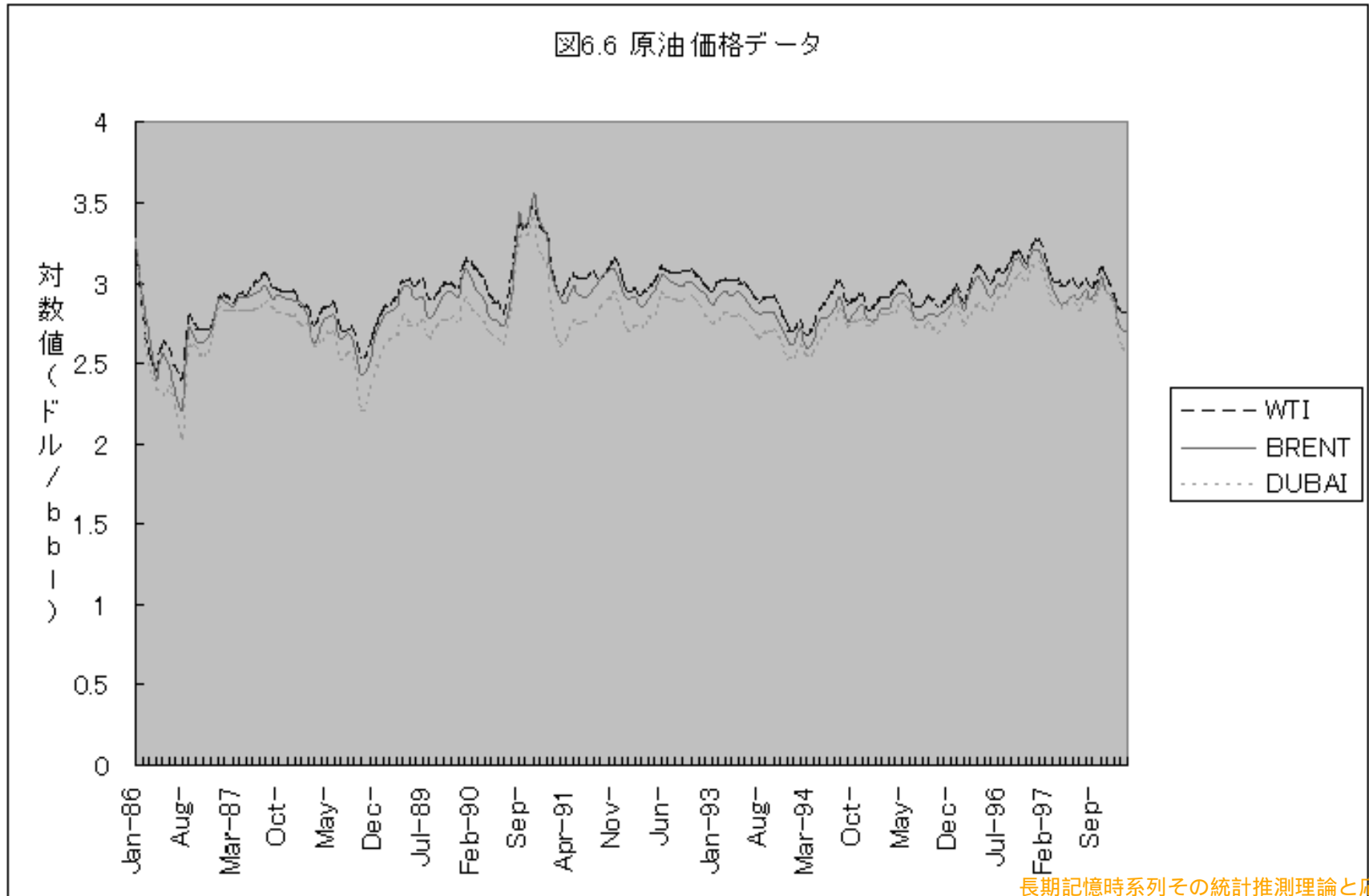
以下で d_i はすべて等しいと仮定し d とする. このときスペクトル密度行列 $f(\lambda)$ を

$$f(0) = G\lambda^{-d} \quad G : n \times n$$

とおけば, $p - \text{rank}(G)$ が共和分の階数

共和分分析実際例(原油データ)

図6.6 原油価格データ



共和分分析(実際例)

原油データ WTI, Brent, Dubai(1986.1-1998.1)

1st Step(推定量 \hat{d}_{GAU})

$$\hat{d}_{GAU}^W = 0.47, \hat{d}_{GAU}^B = 0.31, \hat{d}_{GAU}^D = 0.31$$

(i) 有意水準 5% $d^B = d^D$ を採択

(ii) 有意水準 1% $d^W = d^B = d^D$ を採択

2nd Step

(i) 仮説 $d^B = d^D$. $G(2 \times 2)$ の固有値.

$1.51 \times 10^{-2}, 0.03 \times 10^{-2} \rightarrow$ 共和分の階数 = $2 - 1 = 1$?

(ii) 仮説 $d^W = d^B = d^D$. $G(3 \times 3)$ の固有値.

$1.81 \times 10^{-2}, 0.03 \times 10^{-2}, 0.01 \times 10^{-2} \rightarrow$ 共和分の階数
= $3 - 1 = 2$?

共和分分析(実際例. 続き)

注意 従来の共和分分析では成分時系列がすべて定常と見なされ、共和分は存在しないと解釈されてしまう。

時空間データ

定常ランダムフィールド (定義): $\{X_t | t = (t_1, \dots, t_d)\}$
自己共分散関数

$$\gamma(h) = E(X_t X_{t+h}) = \int_{(-\pi, \pi]^d} \exp(ih' \lambda) f(\lambda) d\lambda$$

$$h = (h_1, \dots, h_d)'$$

$$h' \lambda = \sum_{i=1}^d h_i \lambda_i$$

$f(\lambda)$: Spectral Density Function

注意ここでは d がパラメータの次元

Long Memory Random Fields ($d = 2$)

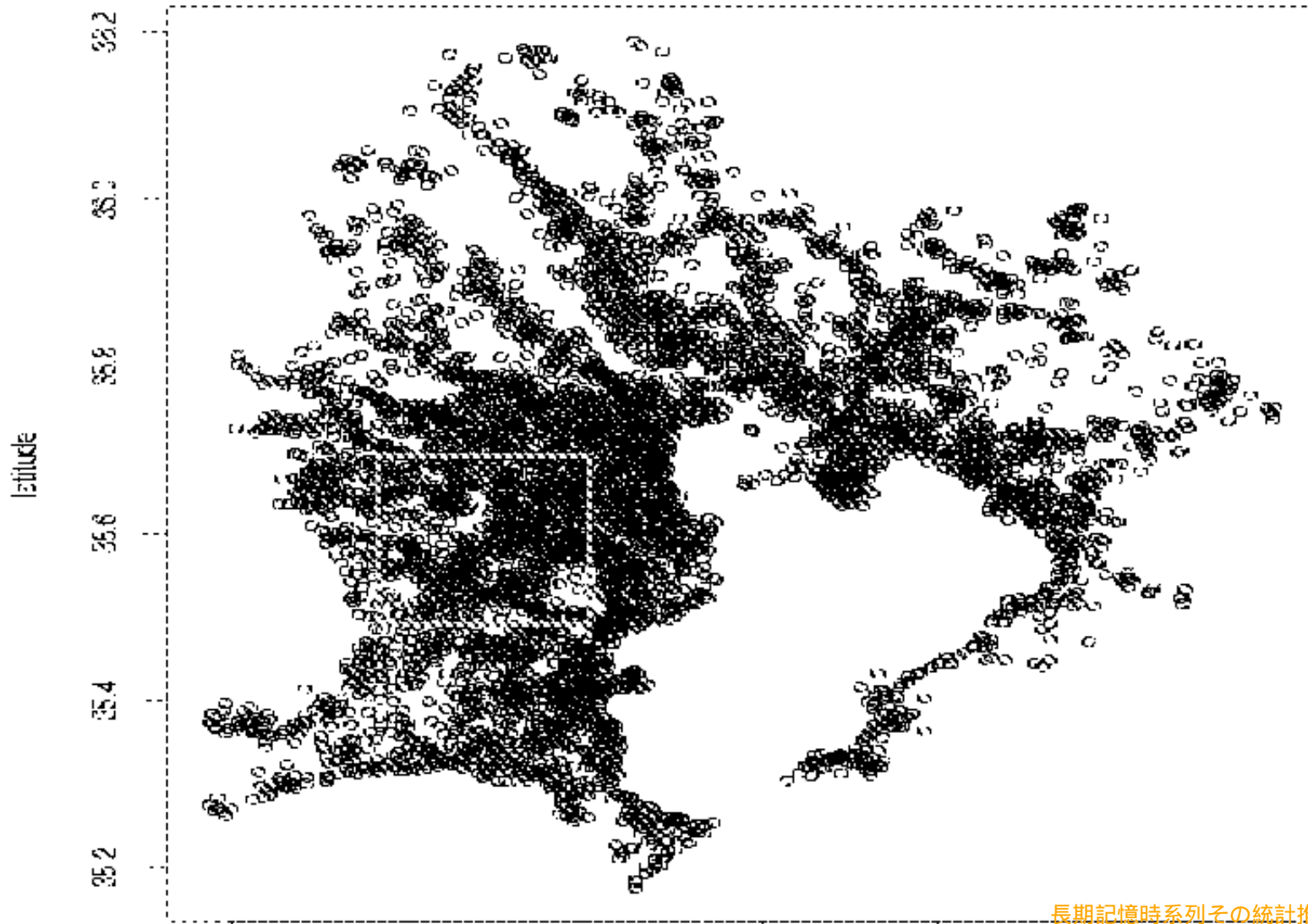
(i) Separable Long Memory Random Field

$$f(\lambda) \sim |\lambda_1|^{-d_1} |\lambda_2|^{-d_2} (0 < d_1, d_2 < 1)$$

(ii) Isotropic Long Memory Random Field

$$f(\lambda) \sim (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{-d} (0 < d < 2)$$

関東地方公示地価観測地点



スペクトル密度(パラメトリック)

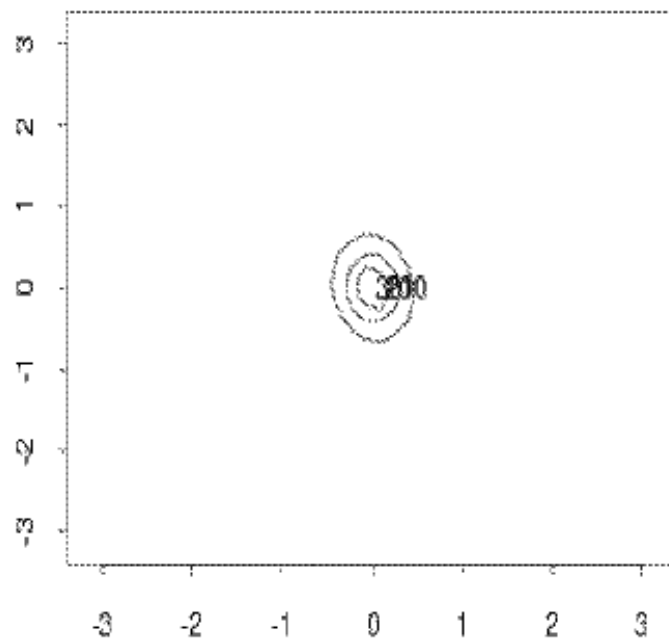
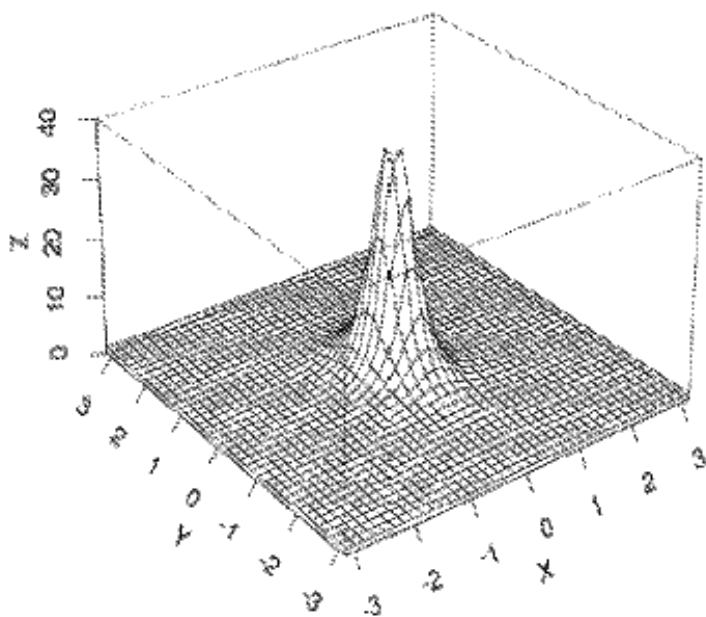


Figure 8: Parametric Estimation

スペクトル密度(ノンパラ)

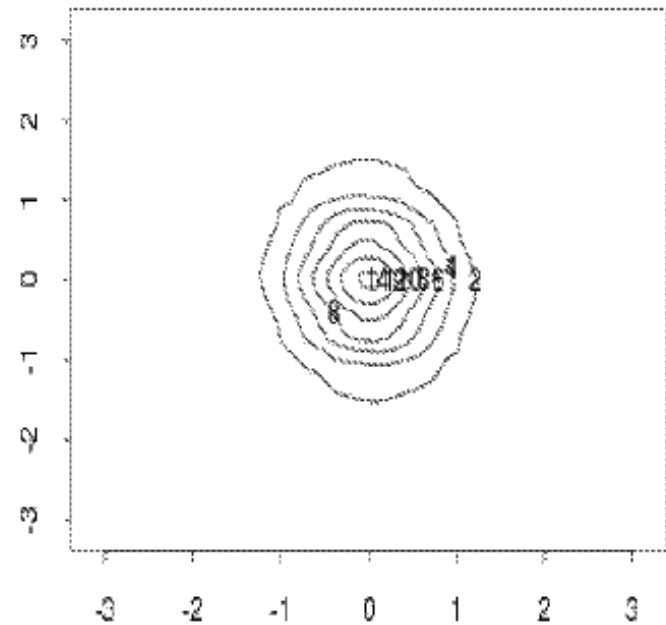
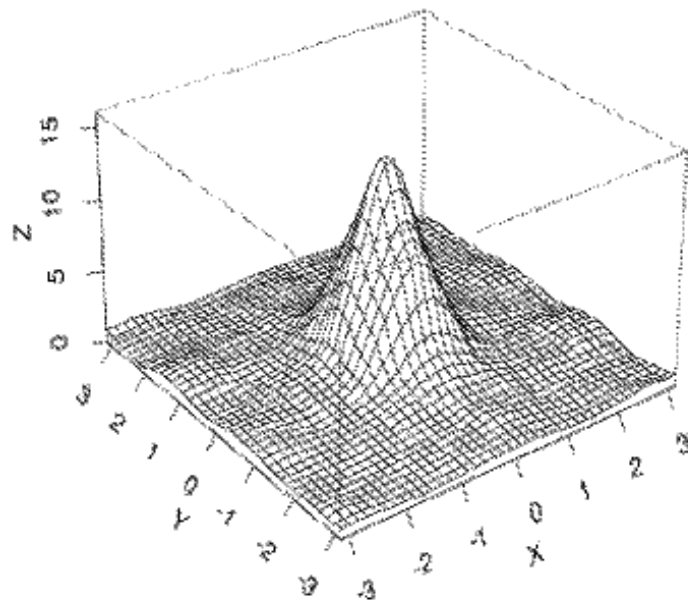


Figure 9: Nonparametric Estimation

研究集会

タイトル:時空間現象データに対する統計科学
モデルの構築および解析に関する組織的研究
(科研費補助金基盤研究(A))

期日 11月29日(木)午後から12月1日(土)午前
まで

場所 岡山国際交流センター(JR岡山駅西口そば)