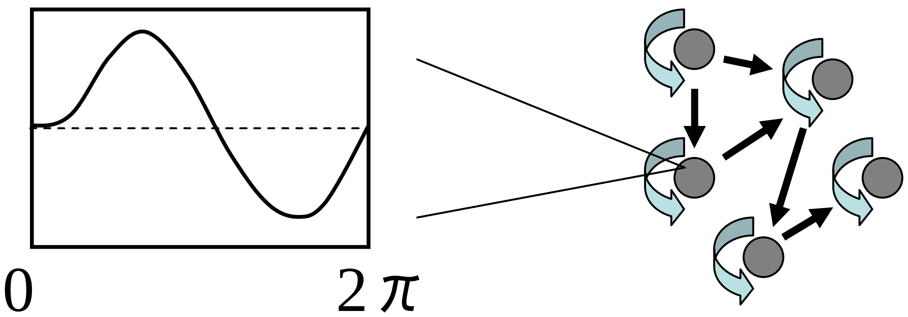
データ変換による位相応答曲線の効率的推定

総合研究大学院大学
博士5年一貫課程5年
中江　健

研究の目的

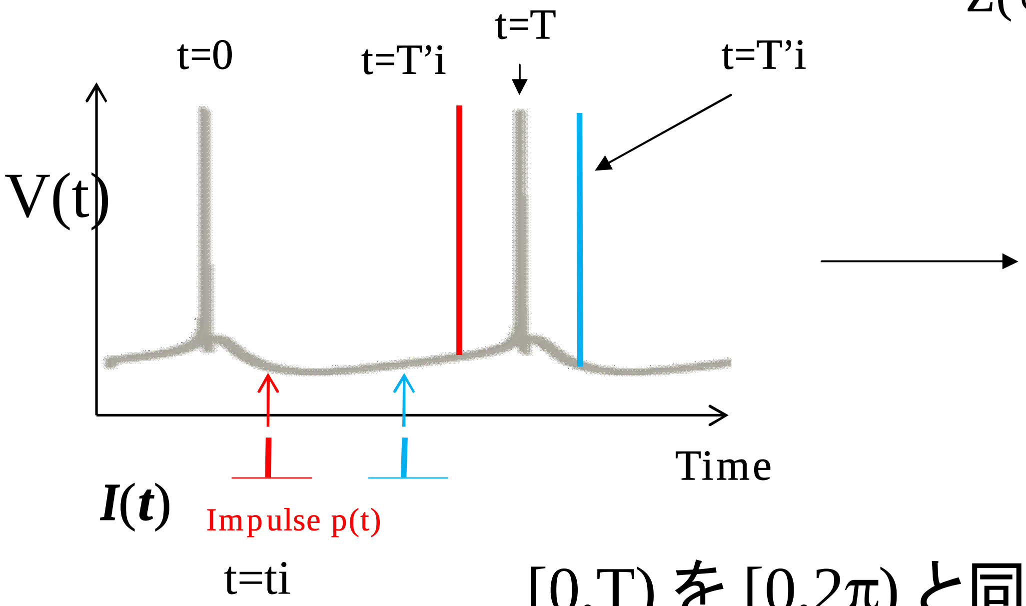
- 位相応答曲線とは同期現象の解析のためのツール(Kuramoto, 1984)
- 振動子の周期的な特性を表す0から2πの周期関数
- 近年、神経細胞に対する実験的な測定が試みられているが測定にはノイズが多く含まれる(Gutkin et. al. 2005, Reyes, 1993, Preyer 2003)
- 本研究の目的は、このようなデータから高精度かつ高速に位相応答曲線を推定する手法の開発

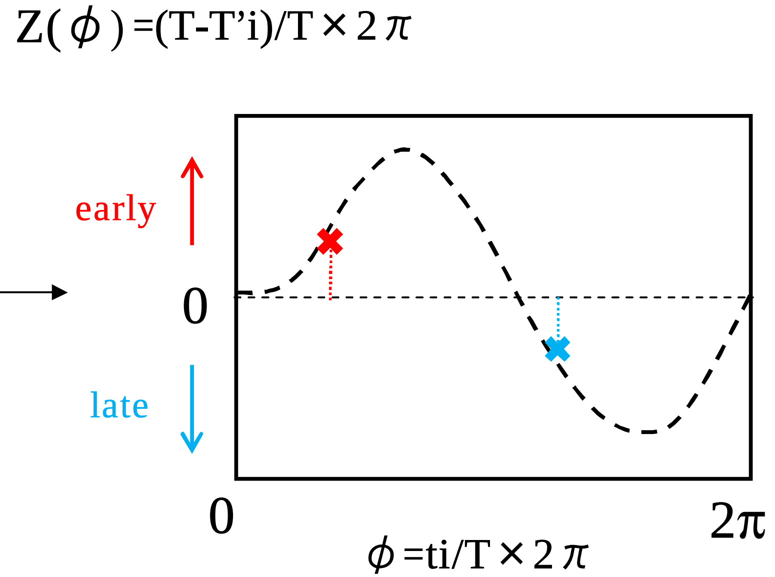


位相応答曲線（周期関数）　　同期する振動子集団（ニューロン集団など）

位相応答曲線の実験的測定方法

神経細胞の平均周期Tの発火活動について考える





[0,T) を [0,2π) と同一視する

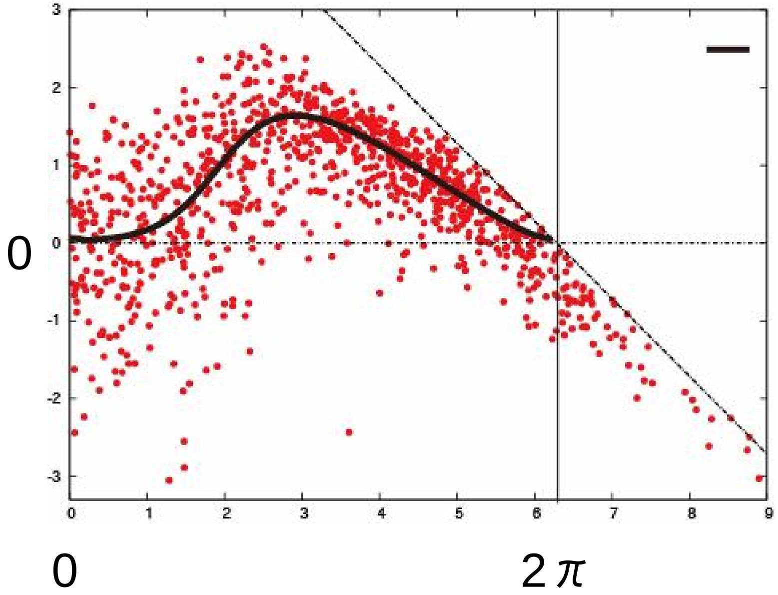
灰色：神経細胞の電位 phase (independent variable)

赤：外力（インパルス電流）とその応答 response (dependent variable)

<u>（近年はこれ以外にも様々な実験手法が提案されています）</u>

(Galan 2005, Ota et al., JCN, 2006, Ota et al., PRL, 2009, Ermentrout, 2007)

位相応答データとその問題点

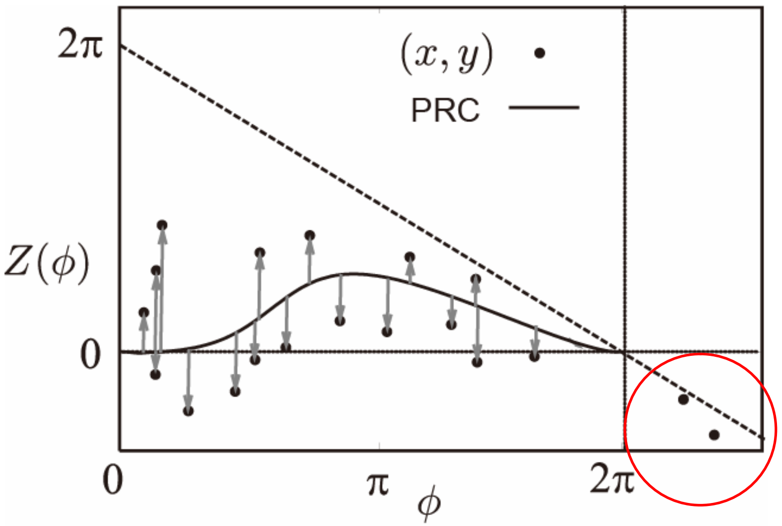


実験によって得られる位相応答データ（赤い点）

推定したい位相応答曲線（黒い曲線）

データに対する従来法の解釈

正規回帰モデル



$$y_i = Z(x_i) + \varepsilon_i \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

回帰モデルの問題点：2π以上の点を切り捨て、分散不一様、正規分布の仮定

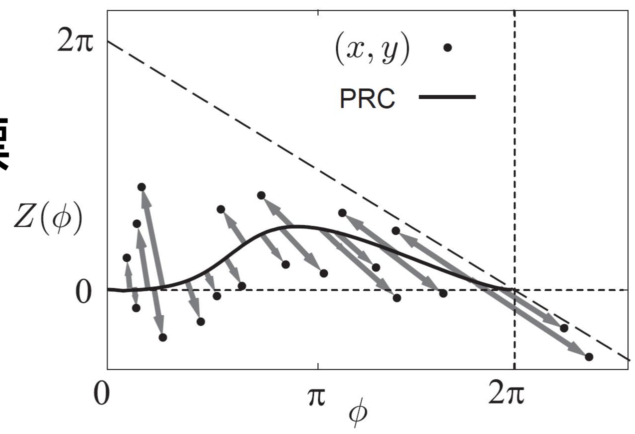
位相応答データとその統計モデル

データ説明する統計モデル(Nakae, 2010)

(x,y):データ　Z:位相応答曲線　ϕ:真のx座標

$$x_i = \phi_i T_i \quad T_i : \textit{stochastic variable}$$

$$y_i = (2\pi - Z(\phi_i))T_i + 2\pi$$



統計モデルの直感的な解釈

（注意点：解析の結果、
$\phi=\pi$ 付近で間違っており、
ϕ=0,2π で正しいことが分かっている）

ϕ iを消去するとモデルがすごいことに

$$y_i = (2\pi - Z(x_i/T_i))T_i + 2\pi$$

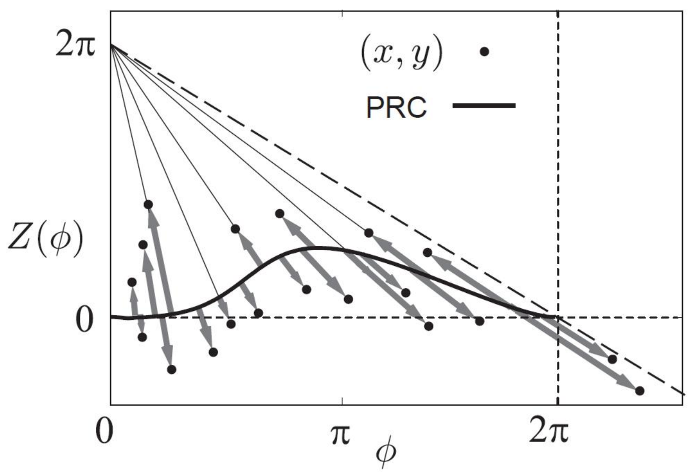
レプリカ交換モンテカルロ法で気合で解く

⇒　ノイズが大きい場合、回帰より良い推定量であることが分かった

しかし、とにかく推定が遅い（データ数N=100, 32core並列で 3時間）

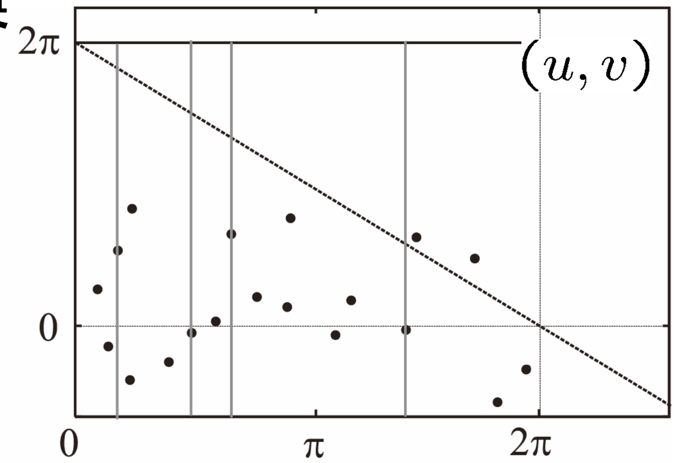
変換ψによる回帰モデルへの帰着

アイデア: 点$(0,2\pi)$をうまく引き伸ばして、誤差の方向をすべて縦軸方向にすることができる



データを変換

ψ



ψ^{-1}

逆変換された曲線を推定曲線にする

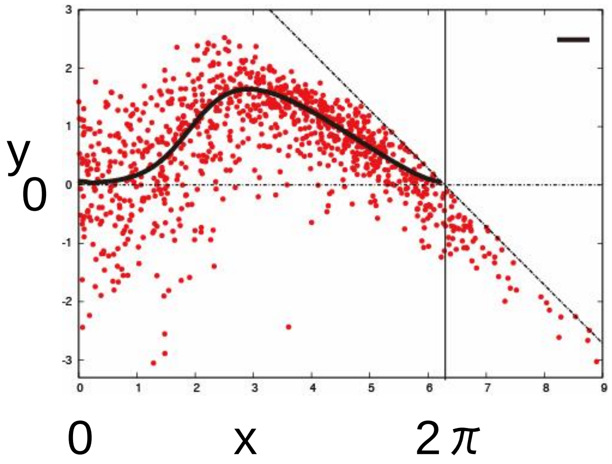
こちらで曲線を推定

データ変換

統計モデルとデータ

$$x_i = \phi_i T_i \quad T_i : \textit{stochastic variable}$$

$$y_i = (2\pi - Z(\phi_i))T_i + 2\pi$$



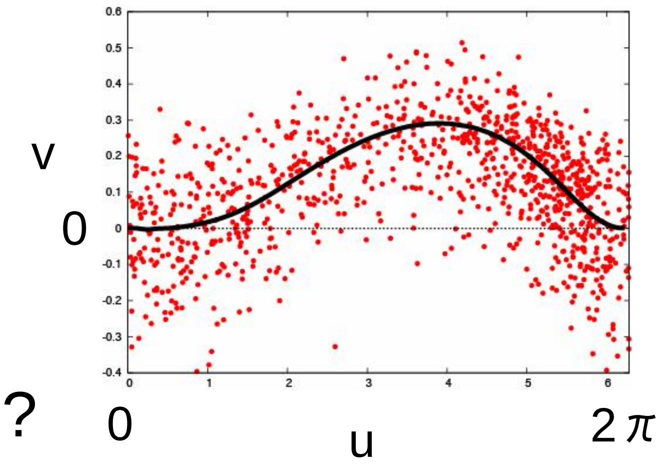
変換と制約条件

$$(u, v) = \psi(x, y) = \left(\frac{2\pi x}{2\pi - y}, \log(\frac{2\pi}{2\pi - y})\right)$$

$$\begin{cases} \forall\phi \in [0, 2\pi) \quad 2\pi - Z(\phi) + \phi Z'(\phi) \neq 0 \\ Z(0) = 0 \quad \text{（ニューロンの場合は不応期）} \end{cases}$$

変換後の統計モデルとデータ

$$v_i = \bar{Z}(u_i) + \varepsilon_i \quad \varepsilon_i = \log(T_i)$$



等分散性、0から2πまでのデータ、正規性?

回帰モデルと逆変換

誤差に正規分布を仮定し、以下のような回帰モデルを構成

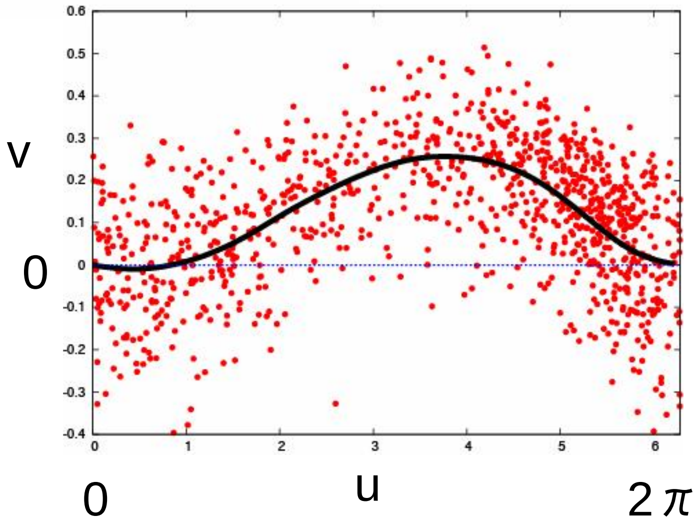
$$v_i = \bar{Z}(u_i) + \varepsilon_i \quad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

$$p(\bar{Z}|d) \propto d^2 \int \left| \frac{d\bar{Z}}{dx} \right|^2 dx \quad \bar{Z}(0) = \bar{Z}(2\pi) = 0$$

(d, σ) : *fix*

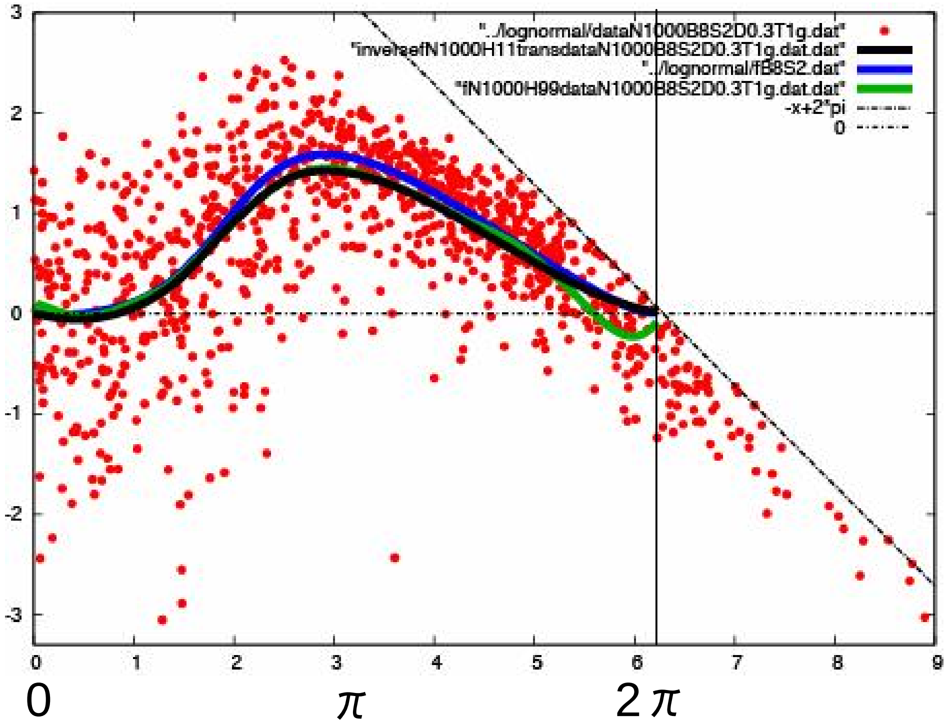
これによって得られた推定曲線に以下の逆変換を施す

$$(x, y) = \psi^{-1}(u, v) = \left(ue^{-v}, 2\pi(1 - e^{-v}) \right)$$



データと推定曲線

結果



ノイズが入ったニューロンの数理モデルに対して実験過程をシミュレートしてデータを作成

（データは提案モデルから生成されたものではない）

赤 : データ(N=1000,s=0.3)

青 : 真の位相応答曲線(s=0)

黒 : 提案手法(変換+spline+逆変換)

緑: 回帰モデル(従来法)

注目するポイント

$\phi=\pi$ 付近のずれ : 真の曲線 vs 提案手法　⇒提案モデルのミス

$\phi=2\pi$ 付近のずれ:提案手法 vs 回帰モデル⇒回帰モデルのミス

まとめと今後の課題

- 位相応答曲線の統計モデルに対して、データ変換を利用し回帰モデルへ帰着した
- その結果、計算時間を短縮した(32x3時間から1x1.5秒、20万倍の高速化)

- $\phi = \pi$ 付近のモデルのずれをどうするか
- Z(0)=0の制約を取ることができるか
- 任意の入力に対する拡張

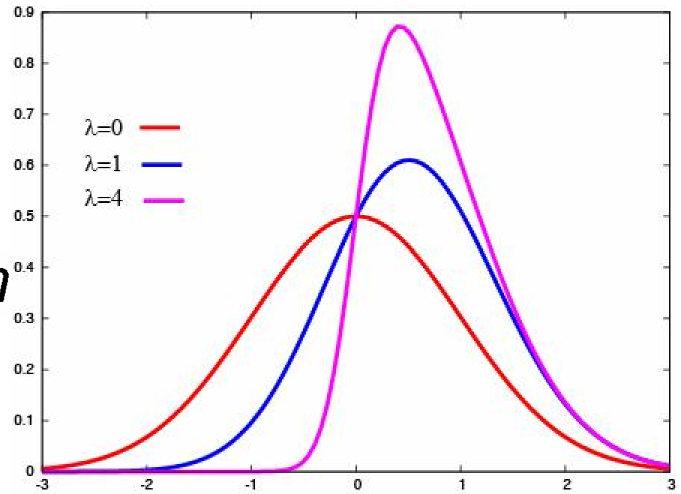
Skew normal distribution

Skew normal distribution SN(μ, σ, λ)

$\phi(x)$: *standard normal density*

$\Phi(x)$: *cumulative normal distribution*

$$f(x:\mu,\sigma,\lambda)=\frac{2}{\sigma}\phi(\frac{x-\mu}{\sigma})\Phi(\lambda\frac{x-\mu}{\sigma})$$



正規分布を特別な場合(λ=0)として含む非対称分布族

理論的に取り扱いやすく、多変量への拡張もなされている

非対称性を決めるλの推定にはいくつかの問題が知られている

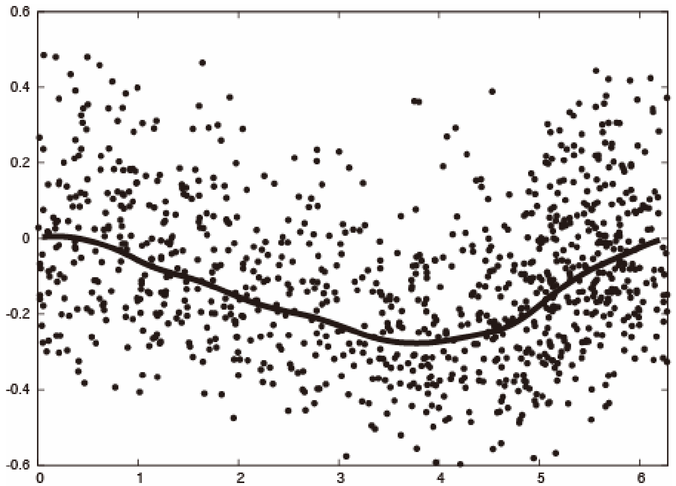
Skew normal mode regression

以下の統計モデルに対してfのMAP推定値を求めた

$$v_i = \bar{Z}(u_i) + \varepsilon_i \quad \varepsilon_i \sim SN(-mode(\sigma, \lambda), \sigma, \lambda)$$

$$p(\bar{Z}|d) \propto d^2 \int \left|\frac{d\bar{Z}}{dx}\right|^2 dx \quad f(0) = f(2\pi) = 0$$

(d, σ, λ) : fix



黒点:変換後のデータ

曲線:ZのMAP推定値