統計的学習理論チュートリアル: 基礎から応用まで

† 鈴木　大慈

† 東京大学
情報理工学研究科
数理情報学専攻

IBIS 2012@筑波大学東京キャンパス文京校舎
2012 年 11 月 7 日

構成

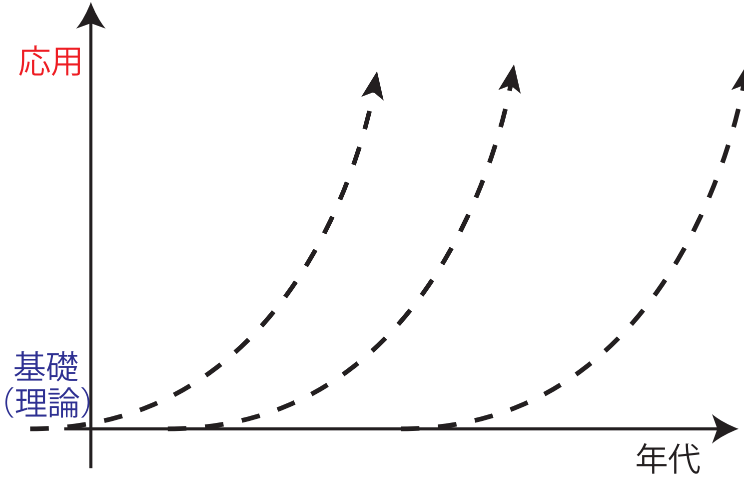
1. はじめに: 理論の役割
2. 統計的学習理論と経験過程
3. 一様バウンド
   - 基本的な不等式
   - Rademacher 複雑さと Dudley 積分
   - 局所 Rademacher 複雑さ
4. 最適性
   - 許容性
   - minimax 最適性
5. ベイズの学習理論

構成

そもそも理論は必要？

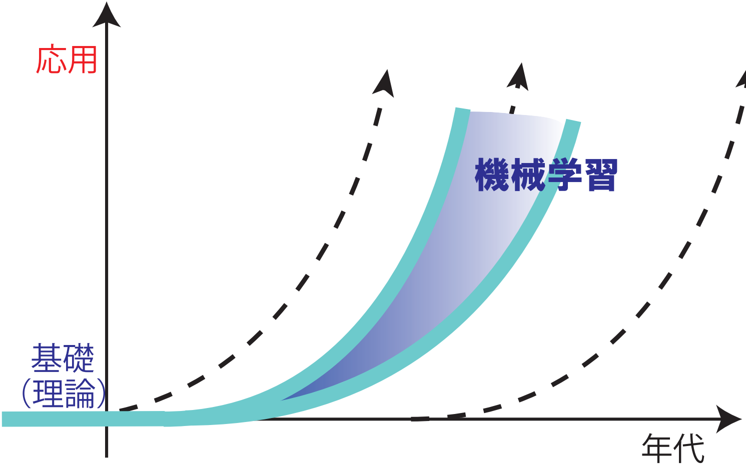
- VC 次元とか再生核の理論とか知らなくても SVM は動かせる.
- 測度論とか知らなくてもノンパラベイズの実装はできる.
- そもそも理論家は **役に立たない** 難しい話をこねくり回しているだけでは？

基礎研究と応用の関係



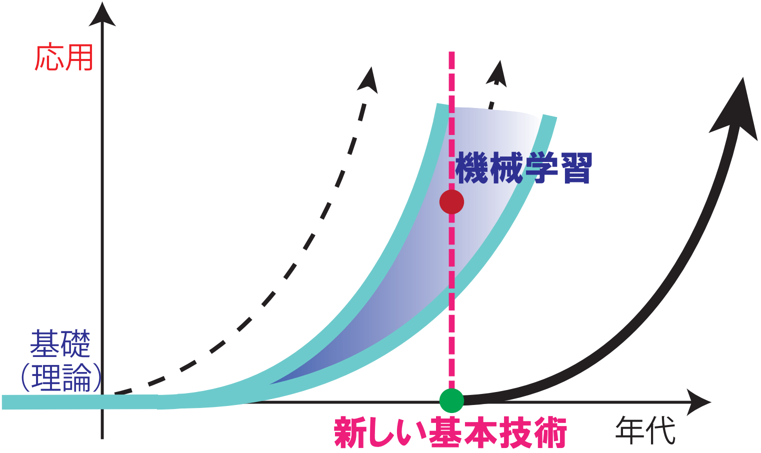
常に数多の基礎研究が応用化されている

基礎研究と応用の関係



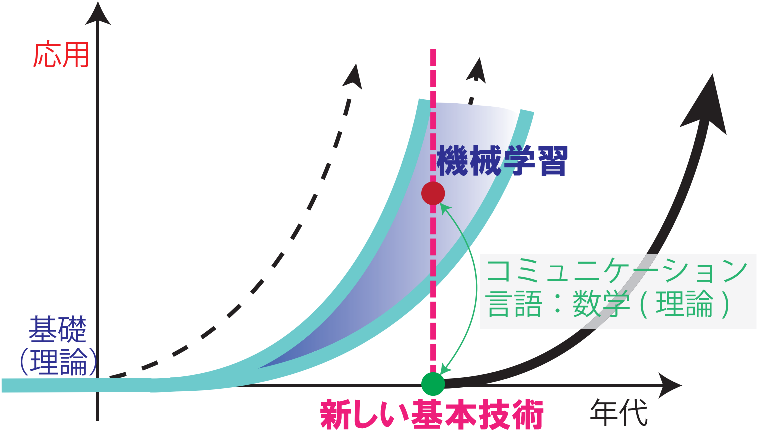
機械学習業界の変遷

基礎研究と応用の関係



未来の応用につながる基礎研究

基礎研究と応用の関係



時に異なるレベル間のコミュニケーションが新しい発見を導く

歴史にみる成功例

- SVM (Vapnik, 1998, Cortes and Vapnik, 1995): VC 次元
- AdaBoost (Freund and Schapire, 1995): 弱学習機による学習可能性
- Dirichlet process (Ferguson, 1973): 確率論，測度論

歴史にみる成功例

- SVM (Vapnik, 1998, Cortes and Vapnik, 1995): VC 次元
- AdaBoost (Freund and Schapire, 1995): 弱学習機による学習可能性
- Dirichlet process (Ferguson, 1973): 確率論，測度論
- Lasso (Tibshirani, 1996)
- AIC (Akaike, 1974)
- 圧縮センシング (Candès, Tao and Donoho, 2004)
- などなど

大事なのは本質の理解
→新しい手法
(そのための本セッション！)

より直接的な効能

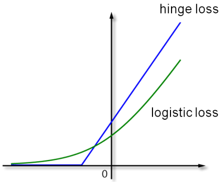
学習理論を知ることのより直接的な有用性

1. **手法の意味**: そもそも何をやっている手法なのか→正しい使い方
2. **手法の正当性**: ちゃんとした解が得られるか（「本当に収束するのか」）
3. **手法の最適性**: ある尺度に関して最適な手法か→安心して使える

①手法の意味: 例. ロス関数の選択

二値判別:
ヒンジロスとロジスティックロス, どちらを使うべき？

$$\min_f \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi(-y_i f(x_i)) \quad (y_i \in \{\pm 1\})$$

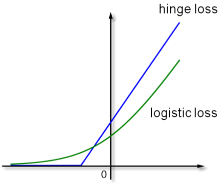


1. **両者とも判別誤差を最小化**
   ϕ が凸の時
   「ϕ は判別一致性をもつ $\Leftrightarrow$ ϕ が原点で微分可能かつ $\phi'(0) > 0$」
   (Bartlett et al., 2006)
   判別一致性: 期待リスク最小化関数 ($\arg\min_f \mathrm{E}[\phi(-Yf(X))]$) が Bayes 最適.

①手法の意味: 例．ロス関数の選択

二値判別:
ヒンジロスとロジスティックロス，どちらを使うべき？

$$\min_f \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi(-y_i f(x_i)) \quad (y_i \in \{\pm 1\})$$



1. **両者とも判別誤差を最小化**
   ϕ が凸の時
   「ϕ は判別一致性をもつ $\Leftrightarrow$ ϕ が原点で微分可能かつ $\phi'(0) > 0$」
   (Bartlett et al., 2006)
   判別一致性: 期待リスク最小化関数 ($\arg\min_f \mathrm{E}[\phi(-Yf(X))]$) が Bayes 最適.
2. **サポートベクターの数 vs 条件付き確率 $p(Y|X)$ の推定能力**
   - ヒンジ: スパースな解 (条件付き確率は全く推定できない)
   - ロジスティック: 条件付き確率が求まる (一方，全サンプルがサポートベクター)

   「サポートベクターの数と条件付き確率の推定能力との間にはトレードオフがある．両者を完全に両立させることはできない.」
   (Bartlett and Tewari, 2007)

②手法の正当性・③手法の最適性

2 **手法の正当性**
例: 一致性

$$\hat{f}\ (\text{推定量}) \quad \xrightarrow{p} \quad f^*\ (\text{真の関数})$$

3 **手法の最適性**
収束するとしてその速さは最適？

- 許容性
- minimax 性

今日はここらへんを中心に話します.

統計的学習理論

構成

1 はじめに: 理論の役割

2 統計的学習理論と経験過程

3 一様バウンド
- 基本的な不等式
- Rademacher 複雑さと Dudley 積分
- 局所 Rademacher 複雑さ

4 最適性
- 許容性
- minimax 最適性

5 ベイズの学習理論

統計的学習理論の立ち位置

厳密評価

	正則	非正則
パラメトリック	Fisher情報量が正則，微分可能 漸近理論 漸近正規性→検定論・情報量規準 普遍性 サンプル数 ≫ 次元	Fisher情報量が退化，微分不可能 •ニューラルネット •隠れ状態モデル 漸近正規性× 錐の幾何学，代数幾何．．． サンプル数 ≫ 次元
ノンパラ	カーネル密度推定， Nadaraya-Watson推定量，スプライン回帰．．． 漸近正規性・漸近展開	

厳密評価の難しい状況：
微分不可能（ヒンジロス，0-1ロス），高次元（スパース）
分布の仮定は最小限
リスクの上界および裾確率の評価
→不等式評価が主
パラメトリック・ノンパラメトリック問わない（一般性）

統計的学習理論の立ち位置

厳密評価

パラメトリック

伝統的数理統計

Fisher情報量が正則，微分可能
漸近理論
漸近正規性→検定論・情報量規準
普遍性
サンプル数 ≫ 次元

非正則

Fisher情報量が退化，微分不可能
•ニューラルネット
•隠れ状態モデル
漸近正規性×
錐の幾何学，代数幾何．．．
サンプル数 ≫ 次元

ノンパラ

カーネル密度推定， Nadaraya-Watson推定量，スプライン回帰．．．
漸近正規性・漸近展開

学習理論

厳密評価の難しい状況：
微分不可能（ヒンジロス，0-1ロス），高次元（スパース）
分布の仮定は最小限
リスクの上界および裾確率の評価
→不等式評価が主
パラメトリック・ノンパラメトリック問わない（一般性）

※実際のところ，境界は非常に曖昧．

統計的学習理論の立ち位置

厳密評価

パラメトリック

伝統的数理統計

Fisher情報量が正則, 微分可能
漸近理論
漸近正規性→検定論・情報量
普遍性
サンプル数 ≫ 次元

非正則

Fisher情報量が退化, 微分不可能
•ニューラルネット
•隠れ状態モデル
漸近正規性×
錐の幾何学, 代数幾何. . .
サンプル数 ≫ 次元

依然として非常に重要

ノンパラ

カーネル密度推定, Nadaraya-Watson推定量, スプライン回帰. . .
漸近正規性・漸近展開

学習理論

厳密評価の難しい状況:
微分不可能(ヒンジロス, 0-1ロス), 高次元(スパース)
分布の仮定は最小限
リスクの上界および裾確率の評価
→不等式評価が主
パラメトリック・ノンパラメトリック問わない(一般性)

今日の内容

※実際のところ, 境界は非常に曖昧.

（今回お話しする）学習理論 $\approx$ **経験過程の理論**

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - \mathrm{E}[f] \right\}$$

の評価が重要.

歴史: 経験過程の理論

1933	Glivenko, Cantelli	Glivenko-Catelli の定理 (一様大数の法則)
1933	Kolmogorov	Kolmogorov-Smirnov 検定 (収束レート，漸近分布)
1952	Donsker	Donsker の定理 (一様中心極限定理)
1967	Dudley	Dudley 積分
1968	Vapnik, Chervonenkis	VC 次元 (一様収束の必要十分条件)
1996a	Talagrand	Talagrand の不等式

構成

問題設定

教師有り学習

教師データ: $D_n = \{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\} \in (\mathcal{X} \times \mathcal{Y})^n$ 入力と出力の i.i.d. 系列
ロス関数: $\ell(\cdot, \cdot) : \mathcal{Y} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ 間違いへのペナルティ
仮説集合 (モデル): $\mathcal{F}$ $\mathcal{X} \to \mathbb{R}$ なる関数の集合

$\hat{f}$: 推定量. サンプル $(x_i, y_i)_{i=1}^n$ から構成される $\mathcal{F}$ の元.

抑えたい量 (汎化誤差):

$$\underbrace{\mathrm{E}_{(X,Y)}}_{\text{テストデータ}}[\ell(Y, \hat{f}(X))] - \inf_{f:\text{可測関数}} \mathrm{E}_{(X,Y)}[\ell(Y, f(X))]$$

- 汎化誤差は収束する？
- その速さは?

Bias-Variance の分解

経験リスク: $\hat{L}(f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ell(y_i, f(x_i))$,
期待リスク: $L(f) = \mathrm{E}_{(X,Y)}[\ell(Y, f(X))]$

$$
\begin{aligned}
\text{汎化誤差} =& L(\hat{f}) - \inf_{f:\text{可測関数}} L(f) \\
=& \underbrace{L(\hat{f}) - \inf_{f\in\mathcal{F}} L(f)}_{\text{推定誤差}} + \underbrace{\inf_{f\in\mathcal{F}} L(f) - \inf_{f:\text{可測関数}} L(f)}_{\text{モデル誤差}}
\end{aligned}
$$

簡単のため $f^* \in \mathcal{F}$ が存在して $\inf_{f\in\mathcal{F}} L(f) = L(f^*)$ とする.

Bias-Varianceの分解

経験リスク: $\hat{L}(f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ell(y_i, f(x_i))$,
期待リスク: $L(f) = \mathrm{E}_{(X,Y)}[\ell(Y, f(X))]$

$$
\begin{aligned}
\text{汎化誤差} =& L(\hat{f}) - \inf_{f:\text{可測関数}} L(f) \\
=& \underbrace{L(\hat{f}) - \inf_{f\in\mathcal{F}} L(f)}_{\text{推定誤差}} + \underbrace{\inf_{f\in\mathcal{F}} L(f) - \inf_{f:\text{可測関数}} L(f)}_{\text{モデル誤差}}
\end{aligned}
$$

簡単のため $f^* \in \mathcal{F}$ が存在して $\inf_{f\in\mathcal{F}} L(f) = L(f^*)$ とする.

※モデル誤差については今回は触れない.
しかし，モデリングの問題は非常に重要.

- Sieve 法, Cross validation, 情報量規準, モデル平均, ...
- カーネル法におけるモデル誤差の取り扱い: interpolation space の理論 (Steinwart et al., 2009, Eberts and Steinwart, 2012, Bennett and Sharpley, 1988).

以降，モデル誤差は十分小さいとする.

経験誤差最小化

経験誤差最小化 (ERM):

$$\hat{f} = \operatorname*{arg\,min}_{f \in \mathcal{F}} \quad \hat{L}(f)$$

正則化付き経験誤差最小化 (RERM):

$$\hat{f} = \operatorname*{arg\,min}_{f \in \mathcal{F}} \quad \hat{L}(f) + \underbrace{\psi(f)}_{\text{正則化項}}$$

- RERM に関する研究も非常に沢山ある (Steinwart and Christmann, 2008, Mukherjee et al., 2002).
- ERM の延長線上.

経験誤差最小化

経験誤差最小化 (ERM): ☆

$$\hat{f} = \mathop{\arg\min}_{f \in \mathcal{F}} \quad \hat{L}(f)$$

正則化付き経験誤差最小化 (RERM):

$$\hat{f} = \mathop{\arg\min}_{f \in \mathcal{F}} \quad \hat{L}(f) + \underbrace{\psi(f)}_{\text{正則化項}}$$

- RERM に関する研究も非常に沢山ある (Steinwart and Christmann, 2008, Mukherjee et al., 2002).
- ERM の延長線上.

出発点

ほとんどのバウンドの導出は次の式から始まる:

$$
\begin{aligned}
& \hat{L}(\hat{f}) \le \hat{L}(f^*) \qquad (\because \text{経験誤差最小化}) \\
\Rightarrow \quad & L(\hat{f}) - L(f^*) \le L(\hat{f}) - \hat{L}(\hat{f}) + \hat{L}(f^*) - L(f^*)
\end{aligned}
$$

Reminder: $\hat{L}(f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ell(y_i, f(x_i))$, $L(f) = \mathrm{E}_{(X,Y)}[\ell(Y, f(X))]$

出発点

ほとんどのバウンドの導出は次の式から始まる:

$$
\begin{aligned}
&\hat{L}(\hat{f}) \le \hat{L}(f^*) \qquad (\because \text{経験誤差最小化}) \\
\Rightarrow\quad &\underbrace{L(\hat{f}) - L(f^*)}_{\text{汎化誤差}} \le \underbrace{L(\hat{f}) - \hat{L}(\hat{f})}_{\color{red}{?}} + \underbrace{\hat{L}(f^*) - L(f^*)}_{O_p(1/\sqrt{n})\ (\text{後述})}
\end{aligned}
$$

Reminder: $\hat{L}(f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ell(y_i, f(x_i))$, $L(f) = \mathrm{E}_{(X,Y)}[\ell(Y, f(X))]$

出発点

ほとんどのバウンドの導出は次の式から始まる:

$$
\begin{aligned}
&\hat{L}(\hat{f}) \leq \hat{L}(f^*) \qquad (\because \text{経験誤差最小化}) \\
\Rightarrow\quad &\underbrace{L(\hat{f}) - L(f^*)}_{\text{汎化誤差}} \leq \underbrace{L(\hat{f}) - \hat{L}(\hat{f})}_{?} + \underbrace{\hat{L}(f^*) - L(f^*)}_{O_p(1/\sqrt{n})\ (\text{後述})}
\end{aligned}
$$

安易な解析

$$
L(\hat{f}) - \hat{L}(\hat{f}) \quad \begin{cases} \to 0 & (\because \textbf{大数の法則!!}) \\ = O_p(1/\sqrt{n}) & (\because \textbf{中心極限定理!!}) \end{cases}
$$

楽勝 !!!

Reminder: $\hat{L}(f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ell(y_i, f(x_i))$, $L(f) = \mathrm{E}_{(X,Y)}[\ell(Y, f(X))]$

出発点

ほとんどのバウンドの導出は次の式から始まる:

$$\hat{L}(\hat{f}) \leq \hat{L}(f^*) \qquad (\because \text{経験誤差最小化})$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{L(\hat{f}) - L(f^*)}_{\text{汎化誤差}} \leq \underbrace{L(\hat{f}) - \hat{L}(\hat{f})}_{?} + \underbrace{\hat{L}(f^*) - L(f^*)}_{O_p(1/\sqrt{n})\ (\text{後述})}$$

安易な解析

$$L(\hat{f}) - \hat{L}(\hat{f}) \begin{cases} \to 0 & (\because \textbf{大数の法則!!}) \\ = O_p(1/\sqrt{n}) & (\because \textbf{中心極限定理!!}) \end{cases}$$

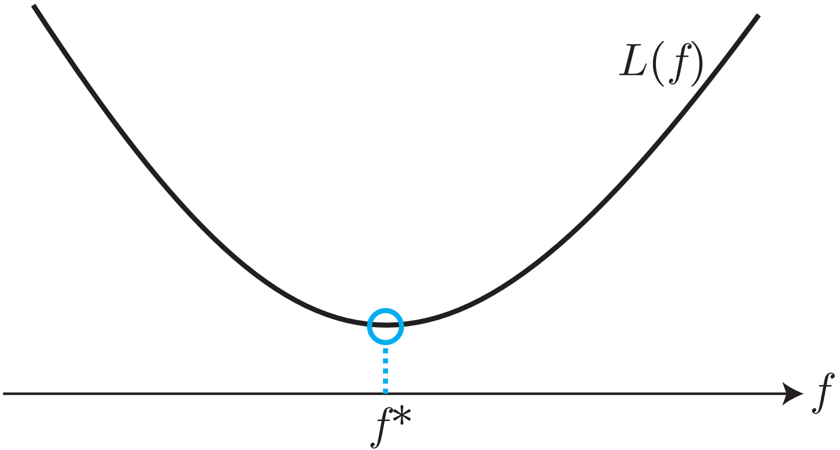
楽勝 !!!

$\boxed{\text{ダメです}}$

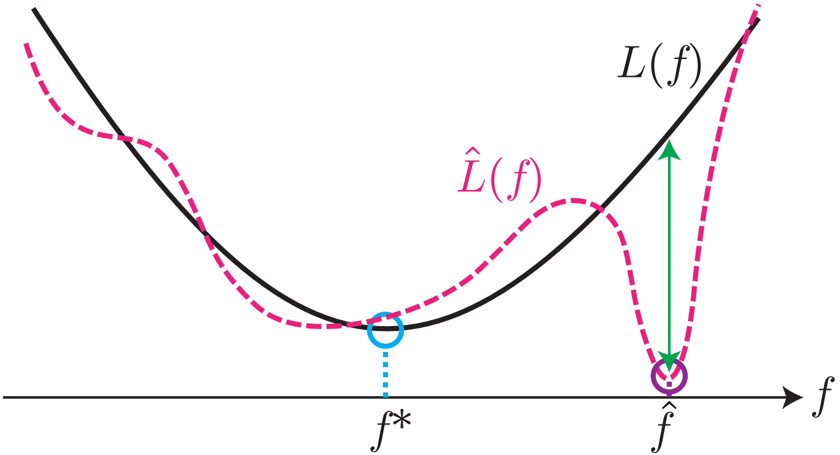
$\hat{f}$ と教師データは独立ではない

Reminder: $\hat{L}(f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ell(y_i, f(x_i))$, $L(f) = \mathrm{E}_{(X,Y)}[\ell(Y, f(X))]$

なにが問題か？

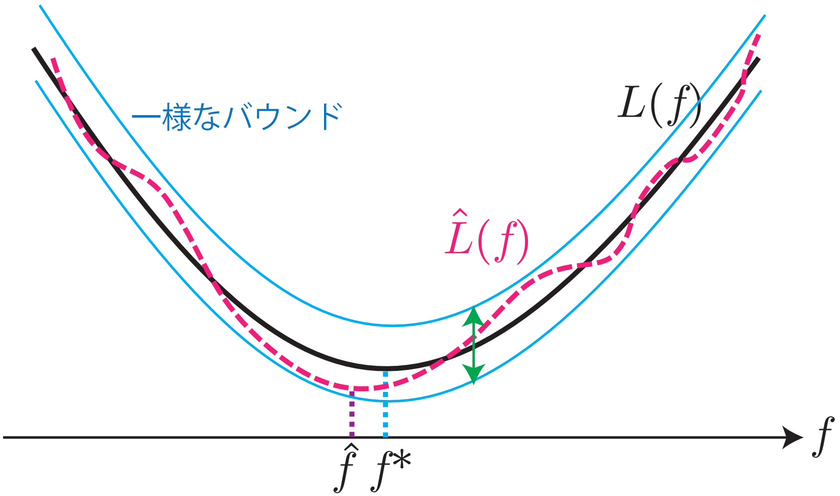


なにが問題か？



"たまたま" うまくいくやつがいる (過学習) かもしれない.
実際，$\mathcal{F}$ が複雑な場合収束しない例が

なにが問題か？



一様なバウンドによって「たまたまうまくいく」が (ほとんど) ないことを保証
それは自明ではない (経験過程の理論)

一様バウンド

$$L(\hat{f}) - \hat{L}(\hat{f}) \leq \sup_{f \in \mathcal{F}} \left\{ L(f) - \hat{L}(f) \right\} \leq (?)$$

<u>一様に</u> リスクを抑えることが重要

構成

まずは有限から

$|\mathcal{F}| < \infty$

有用な不等式

- Hoeffding の不等式
  Z_i $(i = 1, \dots, n)$: 独立で (同一とは限らない) 期待値 0 の確率変数 s.t.
  $|Z_i| \le m_i$
  $$P\left(\frac{|\sum_{i=1}^n Z_i|}{\sqrt{n}} > t\right) \le 2\exp\left(-\frac{t^2}{2\sum_{i=1}^n m_i^2/n}\right)$$

- Bernstein の不等式
  Z_i $(i = 1, \dots, n)$: 独立で (同一とは限らない) 期待値 0 の確率変数 s.t.
  $\mathrm{E}[Z_i^2] = \sigma_i^2, \ |Z_i| \le M$
  $$P\left(\frac{|\sum_{i=1}^n Z_i|}{\sqrt{n}} > t\right) \le 2\exp\left(-\frac{t^2}{2(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + \frac{1}{\sqrt{n}}Mt)}\right)$$

  分散の情報を利用

有用な不等式: 拡張版

- Hoeffding の不等式 (sub-Gaussian tail)
  Z_i $(i = 1, \ldots, n)$: 独立で (同一とは限らない) 期待値 0 の確率変数 s.t.
  $\mathrm{E}[e^{\tau Z_i}] \leq e^{\sigma_i^2 \tau^2/2}$ $(\forall \tau > 0)$

$$P\left(\frac{|\sum_{i=1}^n Z_i|}{\sqrt{n}} > t\right) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{2\sum_{i=1}^n \sigma_i^2/n}\right)$$

- Bernstein の不等式
  Z_i $(i = 1, \ldots, n)$: 独立で (同一とは限らない) 期待値 0 の確率変数 s.t.
  $\mathrm{E}[Z_i^2] = \sigma_i^2,\ \mathrm{E}|Z_i|^k \leq \frac{k!}{2}\sigma^2 M^{k-2}$ $(\forall k \geq 2)$

$$P\left(\frac{|\sum_{i=1}^n Z_i|}{\sqrt{n}} > t\right) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{2(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + \frac{1}{\sqrt{n}}Mt)}\right)$$

(ヒルベルト空間版もある)

有限集合の一様バウンド 1: Hoeffding の不等式版

これだけでも知っていると有用．($f \leftarrow \ell(y, g(x)) - \mathrm{E}\ell(Y, g(X))$ として考える)

$\mathcal{F} = \{f_m \ (m = 1, \dots, M)\}$ 有限個の関数集合: どれも期待値 0 ($\mathrm{E}[f_m(X)] = 0$).

Hoeffding の不等式 ($Z_i = f_m(X_i)$ を代入)

$$P\left(\frac{|\sum_{i=1}^n f_m(X_i)|}{\sqrt{n}} > t\right) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{2\|f_m\|_\infty^2}\right)$$

一様バウンド

- $P\left(\max_{1 \leq m \leq M} \frac{|\sum_{i=1}^n f_m(X_i)|}{\sqrt{n}} > \max_m \|f_m\|_\infty \underline{\sqrt{2\log(2M/\delta)}}\right) \leq \delta$
- $\mathrm{E}\left[\max_{1 \leq m \leq M} \frac{|\sum_{i=1}^n f_m(X_i)|}{\sqrt{n}}\right] \leq C \max_m \|f_m\|_\infty \underline{\sqrt{\log(1+M)}}$

(導出) $P\left(\max_{1 \leq m \leq M} \frac{|\sum_{i=1}^n f_m(X_i)|}{\sqrt{n}} > t\right) = P\left(\bigcup_{1 \leq m \leq M} \frac{|\sum_{i=1}^n f_m(X_i)|}{\sqrt{n}} > t\right) \leq 2\sum_{m=1}^M \exp\left(-\frac{t^2}{2\|f_m\|_\infty^2}\right)$

有限集合の一様バウンド 2: Bernstein の不等式版

$\mathcal{F} = \{f_m\ (m = 1, \dots, M)\}$ 有限個の関数集合: どれも期待値 0 ($\mathrm{E}[f_m(X)] = 0$).

Bernstein の不等式

$$P\left(\frac{|\sum_{i=1}^n f_m(X_i)|}{\sqrt{n}} > t\right) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{2(\|f_m\|_{L_2}^2 + \frac{1}{\sqrt{n}}\|f_m\|_\infty t)}\right)$$

一様バウンド

$$\mathrm{E}\left[\max_{1\leq m\leq M}\frac{|\sum_{i=1}^n f_m(X_i)|}{\sqrt{n}}\right] \lesssim \frac{1}{\sqrt{n}}\max_m \|f_m\|_\infty \log(1+M) + \max_m \|f_m\|_{L_2}\underline{\sqrt{\log(1+M)}}$$

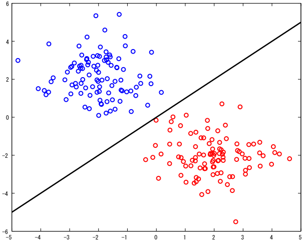
※ 一様バウンドはせいぜい $\sqrt{\log(M)}$ オーダで増える.

構成

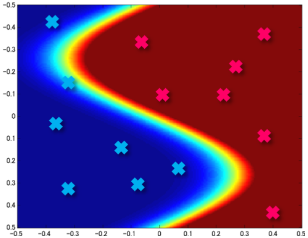
有限から無限へ

仮説集合の要素が無限個あったら？
連続濃度をもっていたら？

$\mathcal{F} = \{x^\top \beta \mid \beta \in \mathbb{R}^d, \|\beta\| \leq 1\}$

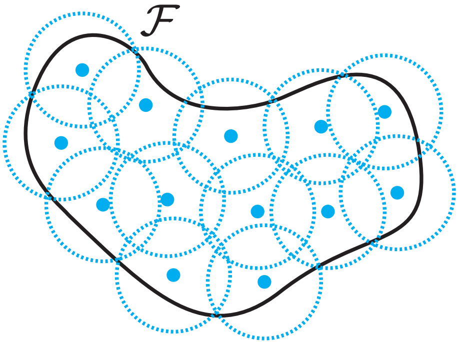


$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H} \mid \|f\|_{\mathcal{H}} \leq 1\}$



基本的なアイディア

有限個の元で代表させる



Rademacher 複雑さ

$\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$: Rademacher 変数, i.e., $P(\epsilon_i = 1) = P(\epsilon_i = -1) = \frac{1}{2}$.

Rademacher 複雑さ

$$R(\mathcal{F}) := \mathrm{E}_{\{\epsilon_i\},\{x_i\}} \left[\sup_{f \in \mathcal{F}} \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i f(x_i) \right| \right]$$

対称化:

(期待値) $$\mathrm{E}\left[\sup_{f \in \mathcal{F}} \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - \mathrm{E}[f]) \right| \right] \leq 2R(\mathcal{F}).$$

もし $\|f\|_\infty \leq 1$ $(\forall f \in \mathcal{F})$ なら

(裾確率) $$P\left(\sup_{f \in \mathcal{F}} \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - \mathrm{E}[f]) \right| \geq 2R(\mathcal{F}) + \sqrt{\frac{t}{2n}} \right) \leq 1 - e^{-t}.$$

Rademacher 複雑さを抑えれば一様バウンドが得られる！

Rademacher 複雑さの各種性質

- Contraction inequality: もし ψ が Lipschitz 連続なら, i.e., $|\psi(f) - \psi(f')| \leq B|f - f'|$,

$$R(\{\psi(f) \mid f \in \mathcal{F}\}) \leq BR(\mathcal{F}).$$

- 凸包: $\mathrm{conv}(\mathcal{F})$ を $\mathcal{F}$ の元の凸結合全体からなる集合とする.

$$R(\mathrm{conv}(\mathcal{F})) = R(\mathcal{F})$$

Rademacher 複雑さの各種性質

- Contraction inequality: もし ψ が Lipschitz 連続なら, i.e., $|\psi(f) - \psi(f')| \leq B|f - f'|$,
$$R(\{\psi(f) \mid f \in \mathcal{F}\}) \leq BR(\mathcal{F}).$$
- 凸包: $\mathrm{conv}(\mathcal{F})$ を $\mathcal{F}$ の元の凸結合全体からなる集合とする.
$$R(\mathrm{conv}(\mathcal{F})) = R(\mathcal{F})$$

特に最初の性質が有り難い.

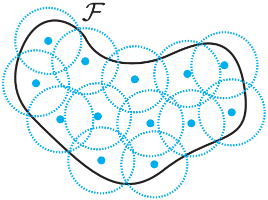
$|\ell(y, f) - \ell(y, f')| \leq |f - f'|$ なら,
$$\mathrm{E}\left[\sup_{f \in \mathcal{F}} |\hat{L}(f) - L(f)|\right] \leq 2R(\ell(\mathcal{F})) \leq 2R(\mathcal{F}),$$
ただし, $\ell(\mathcal{F}) = \{\ell(\cdot, f(\cdot)) \mid f \in \mathcal{F}\}$.

よって $\mathcal{F}$ の Rademacher complexity を抑えれば十分！
Lipschitz 連続性はヒンジロス, ロジスティックロスなどで成り立つ. さらに y と $\mathcal{F}$ が有界なら二乗ロスなどでも成り立つ.

Reminder: $\hat{L}(f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ell(y_i, f(x_i))$, $L(f) = \mathrm{E}_{(X,Y)}[\ell(Y, f(X))]$

カバリングナンバー

Rademacher complexity を抑える方法.
カバリングナンバー: 仮説集合 $\mathcal{F}$ の複雑さ・容量.



ϵ-カバリングナンバー

$$N(\mathcal{F}, \epsilon, d)$$

ノルム d で定まる半径 ϵ のボールで $\mathcal{F}$ を覆うために必要な最小のボールの数.

有限個の元で $\mathcal{F}$ を近似するのに最低限必要な個数.

Theorem (Dudley 積分)

$\|f\|_n^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i)^2$ とすると,

$$R(\mathcal{F}) \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \mathrm{E}_{D_n}\left[\int_0^\infty \sqrt{\log(N(\mathcal{F}, \epsilon, \|\cdot\|_n))}\mathrm{d}\epsilon\right].$$

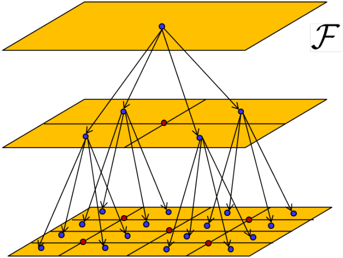
Dudley 積分のイメージ

$$R(\mathcal{F}) \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \mathrm{E}_{D_n}\left[\int_0^\infty \sqrt{\log(N(\mathcal{F}, \epsilon, \|\cdot\|_n))} \mathrm{d}\epsilon\right].$$

有限個の元で $\mathcal{F}$ を近似する.

その解像度を細かくしていって，似ている元をまとめ上げてゆくイメージ.

チェイニング という.



これまでのまとめ

$$\hat{L}(\hat{f}) \le \hat{L}(f^*) \qquad (\because \text{経験誤差最小化})$$

$$\Rightarrow \quad L(\hat{f}) - L(f^*) \le \underbrace{L(\hat{f}) - \hat{L}(\hat{f})}_{\text{これを抑えたい}} + \underbrace{\hat{L}(f^*) - L(f^*)}_{O_p(1/\sqrt{n})\ \text{(Hoeffding)}}$$

ℓ が 1-Lipschitz ($|\ell(y,f) - \ell(y,f')| \le |f - f'|$) かつ $\|f\|_\infty \le 1$ ($\forall f \in \mathcal{F}$) のとき,

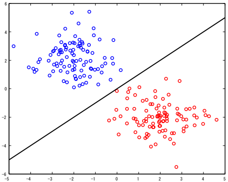
$$\begin{aligned}
L(\hat{f}) - \hat{L}(\hat{f}) &\le \sup_{f\in\mathcal{F}} (L(f) - \hat{L}(f)) \\
&\le R(\ell(\mathcal{F})) + \sqrt{\frac{t}{n}} \quad \text{(with prob. } 1 - e^{-t}) \\
&\le R(\mathcal{F}) + \sqrt{\frac{t}{n}} \quad \text{(contraction ineq., Lipschitz 連続)} \\
&\le \frac{1}{\sqrt{n}} \mathrm{E}_{D_n}\left[\int_0^\infty \sqrt{\log N(\mathcal{F}, \epsilon, \|\cdot\|_n)}\mathrm{d}\epsilon\right] + \sqrt{\frac{t}{n}} \quad \text{(Dudley 積分)}.
\end{aligned}$$

※カバリングナンバーが小さいほどリスクは小さい→ Occam's Razor

例: 線形判別関数

$$\mathcal{F} = \{f(x) = \mathrm{sign}(x^\top \beta + c) \mid \beta \in \mathbb{R}^d, c \in \mathbb{R}\}$$

$$N(\mathcal{F}, \epsilon, \|\cdot\|_n) \le C(d+2)\left(\frac{c}{\epsilon}\right)^{2(d+1)}$$



すると，0-1 ロス ℓ に対し

$$\begin{aligned} L(\hat{f}) - \hat{L}(\hat{f}) &\le O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \mathrm{E}_{D_n}\left[\int_0^1 \sqrt{\log N(\mathcal{F}, \epsilon, \|\cdot\|_n)} \mathrm{d}\epsilon\right]\right) \\ &\le O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^1 C\sqrt{d \log(1/\epsilon) + \log(d)} \mathrm{d}\epsilon\right) \\ &\le O_p\left(\sqrt{\frac{d}{n}}\right). \end{aligned}$$

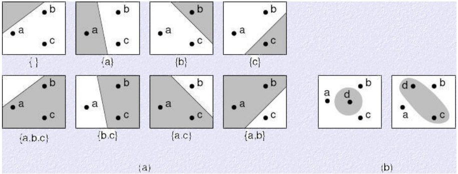
例: VC 次元

$\mathcal{F}$ は指示関数の集合: $\mathcal{F} = \{\mathbf{1}_C \mid C \in \mathcal{C}\}$.
$\mathcal{C}$ はある集合族 (例: 半空間の集合)

- 細分: $\mathcal{F}$ がある与えられた有限集合 $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ を細分する
  $\Leftrightarrow$ 任意のラベル $Y_n = \{y_1, \dots, y_n\}$ ($y_i \in \{\pm 1\}$) に対して X_n を $\mathcal{F}$ が正しく判別できる.
- VC 次元 $V_{\mathcal{F}}$: $\mathcal{F}$ が細分できる集合が存在しない n の最小値.

$$N(\mathcal{F}, \epsilon, \|\cdot\|_n) \le K V_{\mathcal{F}} (4e)^{V_{\mathcal{F}}} \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{2(V_{\mathcal{F}}-1)}$$

$$\Rightarrow \text{汎化誤差} = O_p(\sqrt{V_{\mathcal{F}}/n})$$

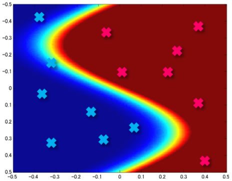


http://www.tcs.fudan.edu.cn/rudolf/Courses/Algorithms/Alg_ss_07w/Webprojects/Qinbo_diameter/e_net.htm から拝借

VC 次元有限が一様収束の必要十分条件 (一般化 Glivenko-Cantelli 定理の必要十分条件)

例: カーネル法

$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H} \mid \|f\|_{\mathcal{H}} \le 1\}$



カーネル関数 k
再生核ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$
$k(x, x) \le 1$ $(\forall x \in \mathcal{X})$ を仮定, e.g., ガウスカーネル.

直接 Rademacher 複雑さを評価してみる.
$\sum_{i=1}^n \epsilon_i f(x_i) = \langle \sum_{i=1}^n \epsilon_i k(x_i, \cdot), f \rangle_{\mathcal{H}} \le \| \sum_{i=1}^n \epsilon_i k(x_i, \cdot) \|_{\mathcal{H}} \|f\|_{\mathcal{H}}$
$\le \| \sum_{i=1}^n \epsilon_i k(x_i, \cdot) \|_{\mathcal{H}}$ を使う.

$$R(\mathcal{F}) = \mathrm{E}\left[\sup_{f \in \mathcal{F}} \frac{|\sum_{i=1}^n \epsilon_i f(x_i)|}{n}\right] \le \mathrm{E}\left[\frac{\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i k(x_i, \cdot) \|_{\mathcal{H}}}{n}\right]$$

$$= \mathrm{E}\left[\frac{\sqrt{\sum_{i,j=1}^n \epsilon_i \epsilon_j k(x_i, x_j)}}{n}\right] \le \frac{\sqrt{\mathrm{E}\left[\sum_{i,j=1}^n \epsilon_i \epsilon_j k(x_i, x_j)\right]}}{n} \quad \text{(Jensen)}$$

$$= \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n k(x_i, x_i)}}{n} \le \frac{1}{\sqrt{n}}$$

例: ランダム行列の作用素ノルム

$A = (a_{ij})$: $p \times q$ 行列で各 a_{ij} は独立な期待値 0 かつ $|a_{ij}| \le 1$ なる確率変数.
A の作用素ノルム $\|A\| := \max_{\substack{\|z\| \le 1 \\ z \in \mathbb{R}^q}} \|Az\| = \max_{\substack{\|w\| \le 1, \|z\| \le 1 \\ w \in \mathbb{R}^p, z \in \mathbb{R}^q}} w^\top Az$.

$$\mathcal{F} = \{f_{w,z}(a_{ij}, (i,j)) = a_{ij} w_i z_j \mid w \in \mathbb{R}^p, z \in \mathbb{R}^q\} \;\Rightarrow\; \|A\| = \sup_{f \in \mathcal{F}} \sum_{i,j} f(a_{ij}, (i,j))$$

$n = pq$ 個のサンプルがあるとみなす.
$\|f_{w,z} - f_{w',z'}\|_n^2 = \frac{1}{pq} \sum_{i,j=1}^{p,q} |a_{ij}(w_i z_j - w_i' z_j')|^2 \le \frac{2}{pq}(\|w - w'\|^2 + \|z - z'\|^2)$

$$\therefore N(\mathcal{F}, \epsilon, \|\cdot\|_n) \begin{cases} \le C(\sqrt{pq}\epsilon)^{-(p+q)}, & (\epsilon \le 2/\sqrt{pq}), \\ = 1, & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{pq} \sup_{w,z} w^\top Az\right] \le \frac{C}{\sqrt{pq}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{pq}}} \sqrt{(p+q)\log(C/\sqrt{pq}\epsilon)}\mathrm{d}\epsilon \le \frac{\sqrt{p+q}}{pq}$$

よって，A の作用素ノルムは $O_p(\sqrt{p+q})$.
→ 低ランク行列推定, Robust PCA, ...
詳しくは Tao (2012), Davidson and Szarek (2001) を参照.

例: Lasso の収束レート

デザイン行列 $X = (X_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times p}$. p (次元) $\gg n$ (サンプル数).
真のベクトル $\beta^* \in \mathbb{R}^p$: 非ゼロ要素の個数がたかだか d 個 (スパース).

$$\text{モデル}: \quad Y = X\beta^* + \xi.$$

$$\hat{\beta} \leftarrow \mathop{\arg\min}_{\beta\in\mathbb{R}^p} \frac{1}{n}\|X\beta - Y\|_2^2 + \lambda_n\|\beta\|_1.$$

Theorem (Lasso の収束レート (Bickel et al., 2009, Zhang, 2009))

デザイン行列が *Restricted eigenvalue condition (Bickel et al., 2009)* かつ $\max_{i,j}|X_{ij}| \leq 1$ を満たし，ノイズが $\mathrm{E}[e^{\tau\xi_i}] \leq e^{\sigma^2\tau^2/2}$ $(\forall\tau > 0)$ を満たすなら，確率 $1-\delta$ で

$$\|\hat{\beta} - \beta^*\|_2^2 \leq C\frac{d\log(p/\delta)}{n}.$$

※次元が高くても，たかだか $\log(p)$ でしか効いてこない．実質的な次元 d が支配的.

log(p) はどこからやってきたか？

有限個の一様バウンドからやってきた.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\|X\hat{\beta} - Y\|_2^2 + \lambda_n \|\hat{\beta}\|_1 \le \frac{1}{n}\|X\beta^* - Y\|_2^2 + \lambda_n \|\beta^*\|_1 \\
\Rightarrow \quad &\frac{1}{n}\|X(\hat{\beta} - \beta^*)\|_2^2 + \lambda_n \|\hat{\beta}\|_1 \le \frac{2}{n}\underbrace{\|X^\top \boldsymbol{\xi}\|_\infty}_{\text{これ}} \|\hat{\beta} - \beta^*\|_1 + \lambda_n \|\beta^*\|_1
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{n}\|X^\top \boldsymbol{\xi}\|_\infty = \max_{1\le j\le p} \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_{ij}\xi_i\right|
$$

$\log(p)$ はどこからやってきたか？

有限個の一様バウンドからやってきた.

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{n}\|X\hat{\beta} - Y\|_2^2 + \lambda_n \|\hat{\beta}\|_1 \leq \frac{1}{n}\|X\beta^* - Y\|_2^2 + \lambda_n \|\beta^*\|_1 \\
\Rightarrow \quad & \frac{1}{n}\|X(\hat{\beta} - \beta^*)\|_2^2 + \lambda_n \|\hat{\beta}\|_1 \leq \frac{2}{n}\underbrace{\|X^\top \boldsymbol{\xi}\|_\infty}_{\text{これ}} \|\hat{\beta} - \beta^*\|_1 + \lambda_n \|\beta^*\|_1
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{n}\|X^\top \boldsymbol{\xi}\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq p} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{ij}\xi_i \right|
$$

Hoeffding の不等式由来の一様バウンドにより, 確率 $1-\delta$ で

$$
\max_{1 \leq j \leq p} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{ij}\xi_i \right| \leq \sigma \sqrt{\frac{2\log(2p/\delta)}{n}}.
$$

Talagrand の concentration inequality

汎用性の高い不等式.

Theorem (Talagrand (1996b), Massart (2000), Bousquet (2002))

$\sigma^2 := \sup_{f \in \mathcal{F}} \mathrm{E}[f(X)^2]$, $P_n f := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i)$, $Pf := \mathrm{E}[f(X)]$ とする.

$$P\left[\sup_{f \in \mathcal{F}} (P_n f - Pf) \geq C\left(\mathrm{E}\left[\sup_{f \in \mathcal{F}} (P_n f - Pf)\right] + \sqrt{\frac{t}{n}}\sigma + \frac{t}{n}\right)\right] \leq e^{-t}$$

Fast learning rate を示すのに有用.

その他のトピック

- Johnson-Lindenstrauss の補題 (Johnson and Lindenstrauss, 1984, Dasgupta and Gupta, 1999)
  n 個の点 $\{x_1, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}^d$ を k 次元空間へ射影する．$k \geq c_\delta \log(n)$ なら，k 次元へのランダムプロジェクション $A \in \mathbb{R}^{k \times d}$ (ランダム行列) は

$$(1-\delta)\|x_i - x_j\| \leq \|Ax_i - Ax_j\| \leq (1+\delta)\|x_i - x_j\|$$

  を高い確率で満たす．
  $\rightarrow$ restricted isometory (Baraniuk et al., 2008, Candès, 2008)
- Gaussian concentration inequality, concentration inequality on product space (Ledoux, 2001)

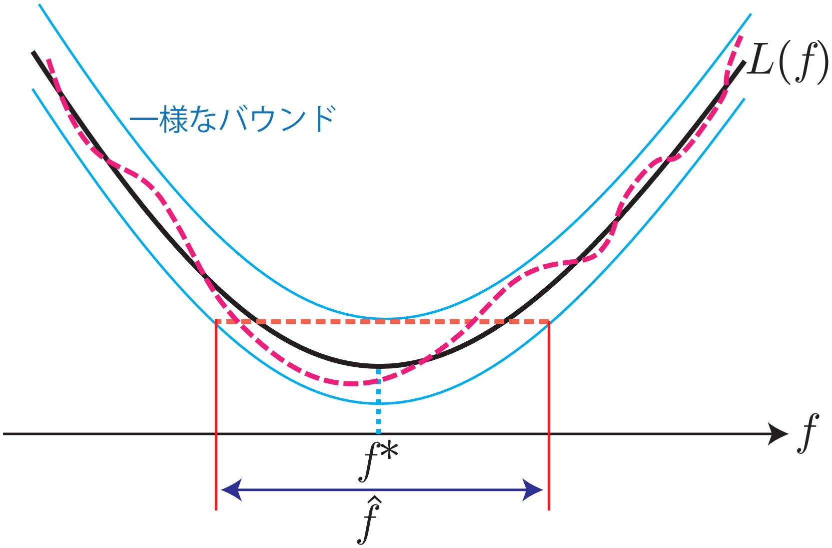
$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i f(x_i) \quad (\xi_i : \text{ガウス分布など})$$

- Majorizing measure: ガウシアンプロセスにまつわる上界，下界 (Talagrand, 2000).

構成

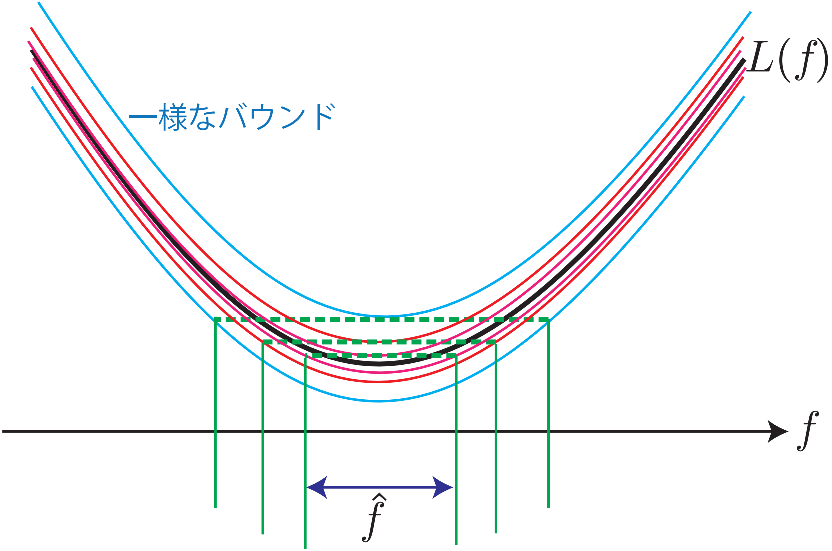
$O_p(1/\sqrt{n})$ オーダより速いレートは示せる？

ロス関数の強凸性を積極的に利用



ロスの強凸性を使うと $\hat{f}$ の存在範囲が制限される→よりきついバウンド

ロス関数の強凸性を積極的に利用



同じ論理を何度も適用させることによって $\hat{f}$ のリスクが小さいことを示す.
$\hat{f}$ が f^* に近いことを利用→ "局所" Rademacher 複雑さ

局所 Rademacher 複雑さ

局所 Rademacher 複雑さ: $R_\delta(\mathcal{F}) := R(\{f \in \mathcal{F} \mid \mathrm{E}[(f - f^*)^2] \le \delta\})$.

次の条件を仮定してみる.

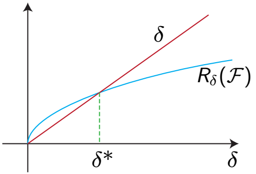
- $\mathcal{F}$ は 1 で上から抑えられている: $\|f\|_\infty \le 1$ $(\forall f \in \mathcal{F})$.
- ℓ は Lipschitz 連続かつ 強凸:
  $\mathrm{E}[\ell(Y, f(X))] - \mathrm{E}[\ell(Y, f^*(X))] \ge B\mathrm{E}[(f - f^*)^2]$ $(\forall f \in \mathcal{F})$.

Theorem (Fast learning rate (Bartlett et al., 2005))

$\delta^* = \inf\{\delta \mid \delta \ge R_\delta(\mathcal{F})\}$ とすると, 確率 $1 - e^{-t}$ で

$$L(\hat{f}) - L(f^*) \le C\left(\delta^* + \frac{t}{n}\right).$$

$\delta^* \le R(\mathcal{F})$ は常に成り立つ (右図参照).
これを Fast learning rate と言う.



Fast learning rate の例

$\boxed{\log N(\mathcal{F}, \epsilon, \|\cdot\|_n) \le C\epsilon^{-2\rho}}$ のとき，

$$R_\delta(\mathcal{F}) \le C\left(\frac{\delta^{\frac{1-\rho}{2}}}{\sqrt{n}} \vee n^{-\frac{1}{1+\rho}}\right),$$

が示され，δ^* の定義から確率 $1 - e^{-t}$ で次が成り立つ:

$$L(\hat{f}) - L(f^*) \le C\left(n^{-\frac{1}{1+\rho}} + \frac{t}{n}\right).$$

※ $1/\sqrt{n}$ よりタイト！

参考文献

- 局所 Rademacher 複雑さの一般論: Bartlett et al. (2005), Koltchinskii (2006)
- 判別問題, Tsybakov の条件: Tsybakov (2004), Bartlett et al. (2006)
- カーネル法における fast learning rate: Steinwart and Christmann (2008)
- Peeling device: van de Geer (2000)

構成

最適性

ある学習方法が「最適」とは？

どの学習方法もデータの分布に応じて得意不得意がある．
「この場合はうまくいくがこの場合はうまくいかない」

主な最適性の規準

- **許容性**
  常に性能を改善させる方法が他にない．
- **minimax 最適性**
  一番不得意な場面でのリスクが最小．

構成

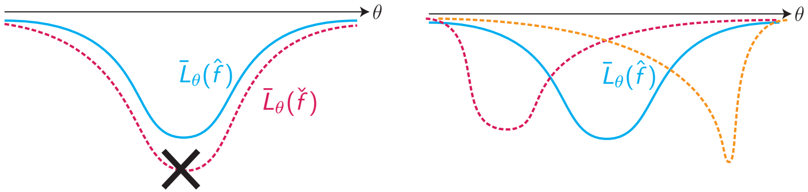
許容性

分布のモデル: $\{P_\theta | \theta \in \Theta\}$
P_θ における推定量 $\check{f}$ のリスクの期待値:

$$\bar{L}_\theta(\check{f}) := \mathrm{E}_{D_n \sim P_\theta}[\mathrm{E}_{(X,Y)\sim P_\theta}[\ell(Y, \check{f}(X))]]$$

Definition (許容性)

$\hat{f}$ が許容的 (admissible)
$\Leftrightarrow$ $\bar{L}_\theta(\check{f}) \le \bar{L}_\theta(\hat{f})$ $(\forall \theta \in \Theta)$ かつ, ある $\theta' \in \Theta$ で $\bar{L}_{\theta'}(\check{f}) < \bar{L}_{\theta'}(\hat{f})$ なる推定量 $\check{f}$ が存在しない.



例

簡単のためサンプル $D_n = \{(x_1, \ldots, x_n)\} \sim P_\theta^n$ から P_θ $(\theta \in \Theta)$ を推定する問題を考える．

- 一点賭け: ある θ_0 を常に用いる．その θ_0 に対する当てはまりは最良だが他の θ には悪い．
- ベイズ推定量: 事前分布 $\pi(\theta)$, リスク $L(\theta_0, \hat{P})$

$$\hat{P} = \mathop{\mathrm{arg\,min}}_{\hat{P}:\text{推定量}} \int \mathrm{E}_{D_n \sim P_{\theta_0}}[L(\theta_0, \hat{P})]\pi(\theta_0)\mathrm{d}\theta_0.$$

  - 二乗リスク $L(\theta, \hat{\theta}) = \|\theta - \hat{\theta}\|^2$: $\hat{\theta} = \int \theta\pi(\theta|D_n)\mathrm{d}\theta$ (事後平均)
  - KL-リスク $L(\theta, \hat{P}) = \mathrm{KL}(P_\theta||\hat{P})$: $\hat{P} = \int P(\cdot|\theta)\pi(\theta|D_n)\mathrm{d}\theta$ (ベイズ予測分布)

ベイズ推定量の定義より，リスク $L(\theta, \hat{P})$ を常に改善する推定量は存在しない．

構成

minimax 最適性

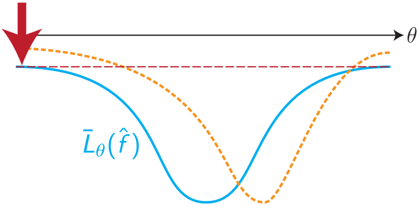
Definition (minimax 最適性)

$$
\begin{aligned}
&\hat{f}\ \text{が minimax 最適} \\
\Leftrightarrow\ &\max_{\theta\in\Theta} \bar{L}_\theta(\hat{f}) = \min_{\check{f}:\text{推定量}} \max_{\theta\in\Theta} \bar{L}_\theta(\check{f}).
\end{aligned}
$$

学習理論では定数倍を許すことが多い: $\exists C$ で

$$
\max_{\theta\in\Theta} \bar{L}_\theta(\hat{f}) \le C \min_{\check{f}:\text{推定量}} \max_{\theta\in\Theta} \bar{L}_\theta(\check{f}) \quad (\forall n).
$$

そういう意味で「minimax レートを達成する」と言ったりする.

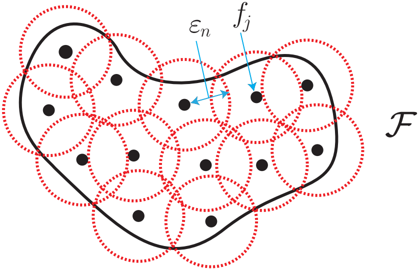


minimax レートを求める方法

Introduction to nonparametric estimation (Tsybakov, 2008) に詳しい記述.

$\mathcal{F}$ を有限個の元で代表させ，そのうち一つ最良なものを選ぶ問題を考える.
(もとの問題より簡単→リスクの下限を与える)

$$\{f_1, \ldots, f_{M_n}\} \subseteq \mathcal{F}$$



個数 M_n と誤差 ε_n のトレードオフ: M_n が小さい方が最適な元を選ぶのが簡単になるが誤差 ε_n が大きくなる.

cf. Fano の不等式, Assouad の補題.

スパース推定の minimax レート

Theorem (Raskutti and Wainwright (2011))

ある条件のもと，確率 1/2 以上で，

$$\min_{\hat{\beta}:\text{推定量}} \max_{\beta^*:d\text{-スパース}} \|\hat{\beta} - \beta^*\|^2 \geq C \frac{d \log(p/d)}{n}.$$

Lasso は minimax レートを達成する ($\frac{d \log(d)}{n}$ の項を除いて).

この結果を Multiple Kernel Learning に拡張した結果: Raskutti et al. (2012), Suzuki and Sugiyama (2012).

構成

ベイズの学習理論

ノンパラベイズの統計的性質

- 教科書: Ghosh and Ramamoorthi (2003), *Bayesian Nonparametrics*. Springer, 2003.
- 収束レート
  - 一般論: Ghosal et al. (2000)
  - Dirichlet mixture: Ghosal and van der Vaart (2007)
  - Gaussian process: van der Vaart and van Zanten (2008a,b, 2011).

ベイズの学習理論

ノンパラベイズの統計的性質

- 教科書: Ghosh and Ramamoorthi (2003), *Bayesian Nonparametrics*. Springer, 2003.
- 収束レート
  - 一般論: Ghosal et al. (2000)
  - Dirichlet mixture: Ghosal and van der Vaart (2007)
  - Gaussian process: van der Vaart and van Zanten (2008a,b, 2011).

PAC-Bayes

$$L(\hat{f}_\pi) \leq \inf_\rho \left\{ \int L(f)\rho(\mathrm{d}f) + 2\left[\frac{\lambda C^2}{n} + \frac{\mathrm{KL}(\rho||\pi) + \log\frac{2}{\epsilon}}{\lambda}\right]\right\}$$

(Catoni, 2007)

- 元論文: McAllester (1998, 1999)
- オラクル不等式: Catoni (2004, 2007)
- スパース推定への応用: Dalalyan and Tsybakov (2008), Alquier and Lounici (2011), Suzuki (2012)

まとめ

一様バウンドが重要

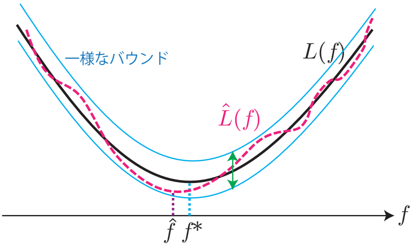
$$\sup_{f\in\mathcal{F}}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ell(y_i,f(x_i))-\mathrm{E}[\ell(Y,f(X))]\right\}$$

- Rademacher 複雑さ
- カバリングナンバー

仮説集合が単純であればあるほど，速い収束.

最適性規準

- 許容性
- minimax 最適性



H. Akaike. A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6):716–723, 1974.

P. Alquier and K. Lounici. PAC-Bayesian bounds for sparse regression estimation with exponential weights. *Electronic Journal of Statistics*, 5:127–145, 2011.

R. Baraniuk, M. Davenport, R. DeVore, and M. Wakin. A simple proof of the restricted isometry property for random matrices. *Constructive Approximation*, 28(3):253–263, 2008.

P. Bartlett, O. Bousquet, and S. Mendelson. Local Rademacher complexities. *The Annals of Statistics*, 33:1487–1537, 2005.

P. Bartlett, M. Jordan, and D. McAuliffe. Convexity, classification, and risk bounds. *Journal of the American Statistical Association*, 101:138–156, 2006.

P. L. Bartlett and A. Tewari. Sparseness vs estimating conditional probabilities: Some asymptotic results. *Journal of Machine Learning Research*, 8:775–790, 2007.

C. Bennett and R. Sharpley. *Interpolation of Operators*. Academic Press, Boston, 1988.

P. J. Bickel, Y. Ritov, and A. B. Tsybakov. Simultaneous analysis of Lasso and Dantzig selector. *The Annals of Statistics*, 37(4):1705–1732, 2009.

O. Bousquet. A Bennett concentration inequality and its application to suprema of empirical process. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.*, 334:495–500, 2002.

E. Candès. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing. *Compte Rendus de l'Academie des Sciences, Paris, Serie I*, 346: 589–592, 2008.

F. P. Cantelli. Sulla determinazione empirica della leggi di probabilità. *G. Inst. Ital. Attuari*, 4:221–424, 1933.

O. Catoni. *Statistical Learning Theory and Stochastic Optimization*. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2004. Saint-Flour Summer School on Probability Theory 2001.

O. Catoni. *PAC-Bayesian Supervised Classification (The Thermodynamics of Statistical Learning)*. Lecture Notes in Mathematics. IMS, 2007.

C. Cortes and V. Vapnik. Support-vector networks. *Machine Learning*, 20(3): 273–297, 1995.

A. Dalalyan and A. B. Tsybakov. Aggregation by exponential weighting sharp PAC-Bayesian bounds and sparsity. *Machine Learning*, 72:39–61, 2008.

S. Dasgupta and A. Gupta. An elementary proof of the johnson-lindenstrauss lemma. Technical Report 99–006, U.C. Berkeley, 1999.

K. R. Davidson and S. J. Szarek. *Local operator theory, random matrices and Banach spaces*, volume 1, chapter 8, pages 317–366. North Holland, 2001.

M. Donsker. Justification and extension of doob's heuristic approach to the kolmogorov-smirnov theorems. *Annals of Mathematical Statistics*, 23:277–281, 1952.

R. M. Dudley. The sizes of compact subsets of hilbert space and continuity of gaussian processes. *J. Functional Analysis*, 1:290–330, 1967.

M. Eberts and I. Steinwart. Optimal learning rates for least squares svms using gaussian kernels. In *Advances in Neural Information Processing Systems 25*, 2012.

T. S. Ferguson. A bayesian analysis of some nonparametric problems. *The Annals of Statistics*, 1(2):209–230, 1973.

Y. Freund and R. E. Schapire. A decision-theoretic generalization of on-line learning and an application to boosting. In *EuroCOLT '95*, pages 23–37, 1995.

S. Ghosal and A. W. van der Vaart. Posterior convergence rates of dirichlet mixtures at smooth densities. *The Annals of Statistics*, 35(2):697–723, 2007.

S. Ghosal, J. K. Ghosh, and A. W. van der Vaart. Convergence rates of posterior distributions. *The Annals of Statistics*, 28(2):500–531, 2000.

J. Ghosh and R. Ramamoorthi. *Bayesian Nonparametrics*. Springer, 2003.

V. I. Glivenko. Sulla determinazione empirica di probabilità. *G. Inst. Ital. Attuari*, 4:92–99, 1933.

W. B. Johnson and J. Lindenstrauss. Extensions of lipschitz mappings into a hilbert space. In *Conference in Modern Analysis and Probability*, volume 26, pages 186–206, 1984.

A. Kolmogorov. Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. *G. Inst. Ital. Attuari*, 4:83–91, 1933.

V. Koltchinskii. Local Rademacher complexities and oracle inequalities in risk minimization. *The Annals of Statistics*, 34:2593–2656, 2006.

M. Ledoux. *The concentration of measure phenomenon*. American Mathematical Society, 2001.

P. Massart. About the constants in talagrand's concentration inequalities for empirical processes. *The Annals of Probability*, 28(2):863–884, 2000.

D. McAllester. Some PAC-Bayesian theorems. In *the Anual Conference on Computational Learning Theory*, pages 230–234, 1998.

D. McAllester. PAC-Bayesian model averaging. In *the Anual Conference on Computational Learning Theory*, pages 164–170, 1999.

S. Mukherjee, R. Rifkin, and T. Poggio. Regression and classification with regularization. In D. D. Denison, M. H. Hansen, C. C. Holmes, B. Mallick, and B. Yu, editors, *Lecture Notes in Statistics: Nonlinear Estimation and Classification*, pages 107–124. Springer-Verlag, New York, 2002.

G. Raskutti and M. J. Wainwright. Minimax rates of estimation for high-dimensional linear regression over ℓ_q-balls. *IEEE Transactions on Information Theory*, 57(10):6976–6994, 2011.

G. Raskutti, M. Wainwright, and B. Yu. Minimax-optimal rates for sparse additive models over kernel classes via convex programming. *Journal of Machine Learning Research*, 13:389–427, 2012.

I. Steinwart and A. Christmann. *Support Vector Machines*. Springer, 2008.

I. Steinwart, D. Hush, and C. Scovel. Optimal rates for regularized least squares regression. In *Proceedings of the Annual Conference on Learning Theory*, pages 79–93, 2009.

T. Suzuki. Pac-bayesian bound for gaussian process regression and multiple kernel additive model. In *JMLR Workshop and Conference Proceedings*, volume 23, pages 8.1–8.20, 2012. Conference on Learning Theory (COLT2012).

T. Suzuki and M. Sugiyama. Fast learning rate of multiple kernel learning: Trade-off between sparsity and smoothness. In *JMLR Workshop and Conference Proceedings 22*, pages 1152–1183, 2012. Fifteenth International Conference on Artificial Intelligence and Statistics (AISTATS2012).

M. Talagrand. New concentration inequalities in product spaces. *Invent. Math.*, 126:505–563, 1996a.

M. Talagrand. New concentration inequalities in product spaces. *Inventiones Mathematicae*, 126:505–563, 1996b.

M. Talagrand. *The generic chaining*. Springer, 2000.

T. Tao. *Topics in random matrix theory*. American Mathematical Society, 2012.

R. Tibshirani. Regression shrinkage and selection via the lasso. *J. Royal. Statist. Soc B.*, 58(1):267–288, 1996.

A. Tsybakov. Optimal aggregation of classifiers in statistical learning. *Annals of Statistics*, 35:135–166, 2004.

A. B. Tsybakov. *Introduction to nonparametric estimation*. Springer Series in Statistics. Springer, 2008.

S. van de Geer. *Empirical Processes in M-Estimation*. Cambridge University Press, 2000.

A. W. van der Vaart and J. H. van Zanten. Rates of contraction of posterior distributions based on Gaussian process priors. *The Annals of Statistics*, 36(3): 1435–1463, 2008a.

A. W. van der Vaart and J. H. van Zanten. Reproducing kernel Hilbert spaces of Gaussian priors. *Pushing the Limits of Contemporary Statistics: Contributions in Honor of Jayanta K. Ghosh*, 3:200–222, 2008b. IMS Collections.

A. W. van der Vaart and J. H. van Zanten. Information rates of nonparametric gaussian process methods. *Journal of Machine Learning Research*, 12: 2095–2119, 2011.

V. Vapnik and A. Y. Chervonenkis. On the uniform convergence of relative frequencies of events to their probabilities. *Soviet Math. Dokl.*, 9:915–918, 1968.

V. N. Vapnik. *Statistical Learning Theory*. Wiley, New York, 1998.

T. Zhang. Some sharp performance bounds for least squares regression with l_1 regularization. *The Annals of Statistics*, 37(5):2109–2144, 2009.